<u>Aufgabenbeispiel zur Kurvendisskusion</u>

(1) <u>Definitionsbereich</u>

(2) <u>Achsenschnittpunkte</u>

(3) <u>Grenzwerte für x -> + ∞ ∧ x-> - ∞</u>

<u>Grenzwertverhalten an den Polstellen</u>

<u>Ableitungen</u>

(6) <u>Extrempunkte</u>

(7) <u>Polynomdivision -> Asymptotengleichung</u>

1.Beispiel : f(x) = (x^2-4)/(x-1)

(1) <u>Definitionsbereich</u>

D(f) = R \ {1}

Bedingung : x-1 ≠ 0

x-1 = 0 ⇔ x = 1

<u>Achsenschnittpunkte</u>

Schnittpunkte mit x-Achse

Bedingung : f(x) = 0

x^2-4 = 0 ⇔ x = ± √ 4 ⇔ x = -2 ∨ x = 2 (Auflösen nach x)

oder

x^2-4 = 0 ⇔ (x+2)(x-2) = 0 ⇔ x = -2 ∨ x = 2 (Binomische Formeln)

=>Sx1 (-2;0) ∧ Sx2 (2;0)

Schnittpunkte mit y-Achse

Bedingung : x = 0

f(0) = (0^2-4)/(x-1) = -4/-1 = 4

=>Sy(0;4)

Grenzwerte für x-> - ∞ ∧ x-> + ∞

lim f(x) = lim x^2-4 = lim x(x-4/x) = lim x-4/x [= ∞ /1] = + ∞

x->∞ x->∞ x-1 x->∞ x(1-1/x) x->∞ 1-1/x

oder

lim f(x) = lim x^2-4 = lim 1-4/x^2 [= 1/0] = +∞

x->∞ x->∞ x-1 x->∞ 1/x-1/x^2

lim f(x) [= -∞ /1] = - ∞

x->-∞

Folgerung : lim f(x) = ∞ ∧ lim f(x) = - ∞

x->∞ x->-∞

Grenzwertverhalten an den Polstellen

l-lim f(x) = lim (1-h)^2-4 = lim 1-2h+h^2-4 [= -3/-h] = ∞

x->1 h->0 (1-h)-1 h->0 -h

r-lim f(x) = lim (1+h)^2-4 = lim 1+2h+h^2-4 [= -3/h] = - ∞

x->1 h->0 (1+h)-1 h->0 h

Folgerung : Die Funktion f(x) = x^2-4

$x-1$

besitzt eine Unendlichkeitsstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach - an der Stelle $x=1$

Ableitungen

1.Ableitung

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2-4)1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x+4}{(x^2-2x+1)}$$

2.Ableitung

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x+1)-(x^2-2x+4)(2x-2)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-6x+6}{(x-1)^4} = \frac{-6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-6}{(x-1)^3}$$

3.Ableitung

$$f'''(x) = \frac{18}{(x-1)^4}$$

Extrempunkte

notwendige Bedingung : $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} = 0$$

$\Leftrightarrow x^2-2x+4 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{1-4}$ nicht definiert

$x2 = 1 - \sqrt{1-4}$ nicht definiert

LL = { }

Folgerung : Es gibt keine Hoch- oder Tiefpunkte

<u>Asymptotengleichung</u>

(x^2-4) : (x-1) = x+1 + (-3)/(x-1)

<u>-(x^2-x)</u>

x-4

<u>-(x-1)</u>

-3

(x^2-4) : (x-1) = x+1 + (-3)/(x-1)

⇔ (x^2-4)/(x-1) = x+1 - 3/(x+1) = f(x) ¦ -(x+1)

↓↓

f(x) g(x) ->0(x->± ∞)

Behauptung : lim f(x) = lim g(x)

x->± ∞ x->± ∞

Beweis : <u>x^2-4</u> - (x-1) = - <u>3</u>

x-1 x-1

↓

f(x) - g(x) = - <u>3</u>

x-1

lim (f(x)-g(x) = lim - <u>3</u>

x->∞ x->∞ x-1

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \Big| \; +[\lim_{x\to\infty} g(x)]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$$