"C.SCH." <cschuebel@odn.de>

Maximilian-Kolbe-Schule

Fachreferat in der Mathematik

Näherungsweise Berechnung von Flächen :

Das Sehnentrapez Verfahren

Christian Schübel, 12 Wd

Vortrag am : 20. Mai 1998

Näherungsweise Berechnung von Flächen: Das Sehnentrapez Verfahren

$f(x)=1/4x^3+x^2+1$ (Abb.I-III)

Wir wollen die Fläche **S** unter dem Graphen annähernd bestimmen .(Abb.I)

Also teilen wir die Strecke **[a,b]** in beispielsweise **3** Teile

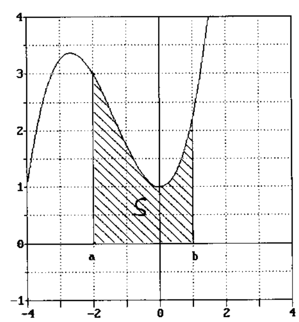


Abbildung I

"C.SCH." <cschuebel@odn.de>

Jedes Teil hat dann die Breite: **(h)=** $\mathbf{\frac{b-a}{3}}$

Dann rechnen wir an den 4 Grenzstellen

jeweils den Funktionswert aus , also
f(a), f(a+h), f(a+2h) und **f(b)** .

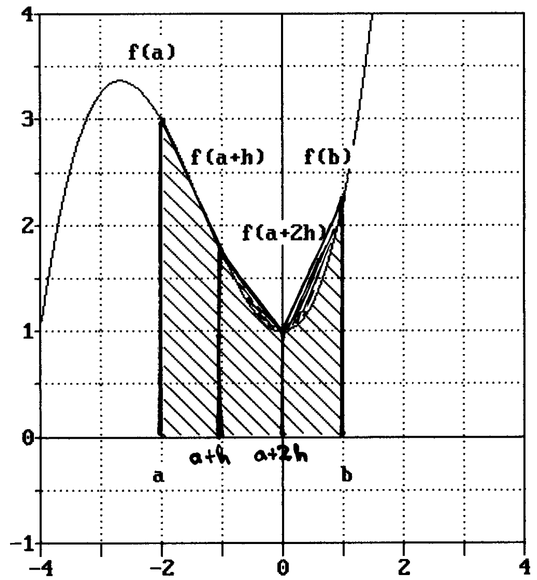


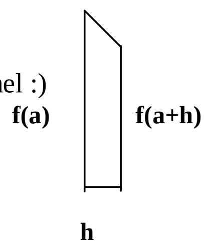
Abbildung II

Die Fläche der **3** entstehenden Trapeze
ist zusammen <u>ungefähr</u> so groß , wie
die gesuchte Fläche S.

Das linke Trapez z.B. hat die Fläche :

$$\mathbf{\frac{h*(f(a)+f(a+h))}{2}}$$

(Das ist die Trapezformel :)



<u>Die 3 Trapeze zusammen haben also den Flächeninhalt :</u>

S:= h/2 (f(a)+f(a+h)) + h/2(f(a+h)+f(a+2h)) + h/2 (f(a+2h)+f(b)
linkes Trapez Mitteltrapez rechtes Trapez

Das kann man umformen : S:= h/2[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+f(b)]

Will man die Fläche genauer annähern

(approximieren), braucht man

mehrere dünnere Trapeze.

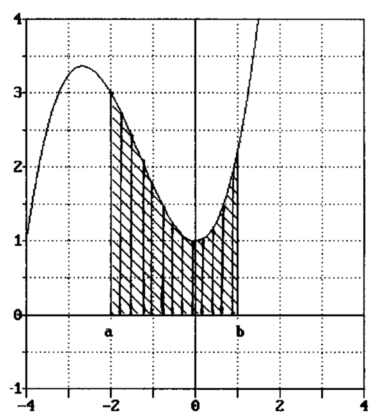


Abbildung III

Teilt man die Strecke von **a** nach **b**
in **n** Teile ,

so erhält man **n** Trapeze

der Breite: **h=** $\mathbf{\frac{b-a}{n}}$

Es folgt die **<u>Sehnentrapezformel:</u>**

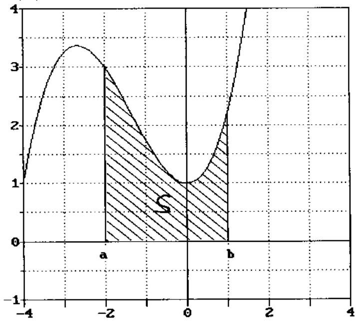
S = h/2*[f(a) + 2f(a+h) +2f(a+2h)+...+ 2f(a+(n-1)h) + f(b)]

"C.SCH." <cschuebel@odn.de>

und nun folgt eine Beispielrechnung mit n=6 Trapezen

BEISPIELRECHNUNG:

f(x)= 1/4x^3+x^2+1



Gesucht : Schraffierte Fläche S,
also **a= -2 , b=1**

Wir teilen z.B. in 6 Teile ,
also **n=6**

$\frac{(b-a)}{n}$ => **h** = 3/6 = ½

Wir berechnen die 7 Funktionswerte :

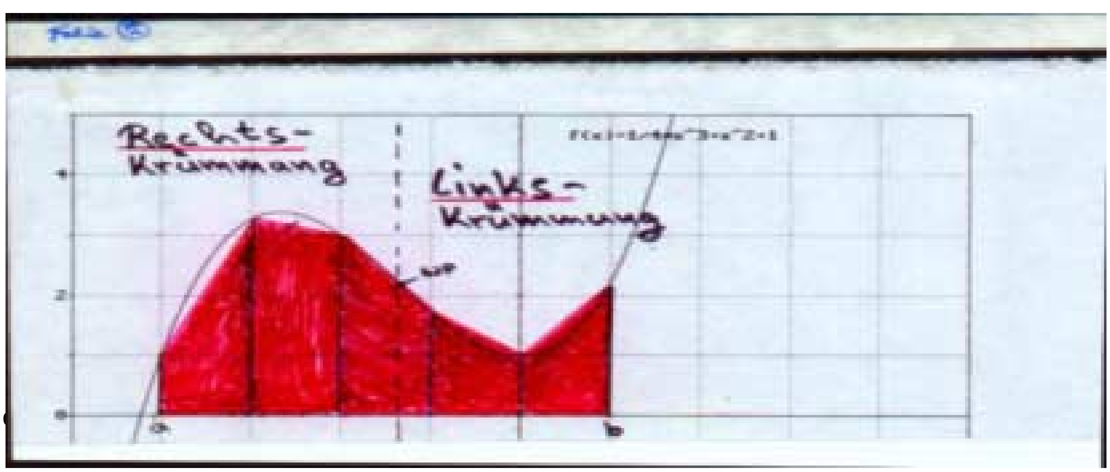
f(a)	f(a+h)	f(a+2h)	f(a+3h)	f(a+4h)	f(a+5h)	**f(b)**
f(-2)	**f(-1,5)**	**f(-1)**	**f(-0,5)**	**f(0)**	**f(0,5)**	**f(1)**
3	2,40625	1,75	1,21875	1	1,28125	**2,25**

In die Sehnentrapezformel : **[**s= h/2*(**f(a)**+2f(a+h)+2f(a+2h)+...+2f(a+(n-1)h)+**f(b))]**

S = 1/2/2*[**3** +2*2,40625 +2*1,75 +2*1,21875 +2*1 +2*1,28125+ **2,25**] =

=1/4*[3+4,8125+3,5+2,4375+2+2,5625*2,25] **= 5,140625**

Das Sehnentrapez Verfahren stellt nur eine Näherungsweise Berechnung von Flächen dar ,
somit wird immer ein, wenn auch relativ kleiner, Fehler entstehen .
Der berechnete Näherungswert ist
bei **Rechts**krümmung **zu klein** und bei **Links**krümmung **zu groß**.
(Im Idealfall würden sich die Fehler aufheben .)
Vgl. Folie 2 : (Beispiel Rechnung)



"C.SCH." <cschuebel@odn.de>

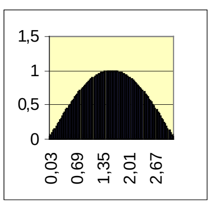
In der Praxis werden Verfahren dieser Art angewandt , da eine Näherungsweise Bestimmung einer Fläche unter einem Funktionsgraphen meist schon ausreicht .
Das Sehnentrapez Verfahren ist ein relativ genaues Verfahren und wird mit steigendem **n** (Abb.III) schnell sehr genau .
Wir haben einige Funktionen durch Integration lösen können
Aber was wenn **Sin (X)** z.B. berechnen wollen ,wie geht das?
(Lehrplan Fachbereich Wirtschaft enthält die Integration von sin(x) nicht !!)
Zum Beispiel mit dem Sehnentrapez Verfahren.
Dafür habe ich in Excel einige anschauliche Berechnungen programmiert .
Sie sollen zur Veranschaulichung des gesamten Sachverhaltes dienen ,
speziell die steigende Genauigkeit der Berechnung mit steigendem **n** soll nochmals eindringlich widergespiegelt werden .

Es folgen Ausschnitte des Programmes :

Berechnung der Fläche die , die SIN- Kurve, von 0 bis “pi”(3,141...),über der X-Achse einschließt

Mit 5 Trapezen:

Das Sehnentrapez Verfahren		**n=5(Trapeze)**	a= **0**	b= **3,1**	h = b-a/n
			h= **0,6**		
Funktion :**f(x)=**	**SIN(x)**				
Sehnentrapez:	**s= h/2*(f(a)+**2f(a+h)+2f(a+2h)+...+2f(a+(n-1)h)**+f(b))**				
X-Werte:(**a+h**)	Y-Werte:(**f(a+h)**)	**f(a+h)**	**Fläche:**		
0,628318531	0,587785252	1,1755705	**1,933765598**		
1,256637061	0,951056516	1,90211303			



1,884955592	0,951056516	1,90211303	*max.Fehler :*
2,513274123	0,587785252	1,1755705	*0,08696961*

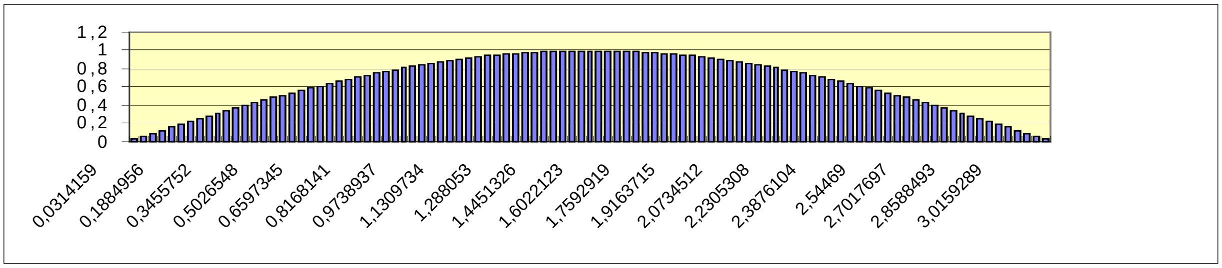
Berechnung der Fläche die , die SIN- Kurve, von 0 bis “pi”(3,141...),über der X-Achse einschliest

Mit 100 Trapezen:

1	**Das Sehnentrapez Verfahren**		f(x)=**sin(x)**	**n=100(Trapeze)**	h= pi/100	b="pi"	a=0
2	**Sehnentrapez: s:=**	**s= h/2*(f(a)+**2f(a+h)+2f(a+2h)+...+2f(a+(n-1)h)**+f(b))**				h = b-a/n	
3	X-Werte:(**a+h**)	Y-Werte:(**f(a+h)**)	**f(a+h)**	**Fläche:**			
4	0,031415927	0,031410759	0,062821518	**1,999835504**			
5	0,062831853	0,06279052	0,125581039				
6	0,09424778	0,094108313	0,188216627	*max.Fehler:*			
7	0,125663706	0,125333234	0,250666467	*0,000217424*			
8	0,157079633	0,156434465	0,31286893				

"C.SCH." <cschuebel@odn.de>

9	0,188495559	0,187381315	0,374762629
10	0,219911486	0,218143241	0,436286483
11	0,251327412	0,248689887	0,497379774
12	0,282743339	0,278991106	0,557982212
13	0,314159265	0,309016994	0,618033989
14	0,345575192	0,33873792	0,67747584



15	0,376991118	0,368124553	0,736249105

Berechnung der Fläche die , die SIN- Kurve, von 0 bis “pi”(3,141...),über der X-Achse einschliest

Mit 200 Trapezen:

1					
2	**Das Sehnentrapez Verfahren**		**n=200(Tra.)**		
3					
4	Funktion :**f(x)=**	**sin(x)**			h = b-a/n
5	**Sehnentrapez:**	**s= h/2*(f(a)+**2f(a+h)+2f(a+2h)+...+2f(a+(n-1)h)**+f(b))**			
6	X-Werte:(**a+h**)	Y-Werte:(**f(a+h)**)	**f(a+h)**		
7					
8				**Fläche:**	
9				**1,99999....**	
10	0,015707963	0,015707317	0,03141463	*max. Fehler:*	
11	0,031415927	0,031410759	0,06282152	*0,0000543*	
12	0,04712389	0,047106451	0,0942129		
13	0,062831853	0,06279052	0,12558104		
14	0,078539816	0,078459096	0,15691819		
15	0,09424778	0,094108313	0,18821663		
16	0,109955743	0,109734311	0,21946862		
17	0,125663706	0,125333234	0,25066647		

Quellenverzeichnis :

"C.SCH." <cschuebel@odn.de>

1. Hirscher/Scheid : Grundbegriffe der Analysis

2.Barner/Flohr : Analysis 1

3.Infinitesimalrechnung 1