JPL0709@aol.com

Exponentialfunktionen

Definition: Zuordnungen der Form

$$\mathbf{x \longrightarrow q^{x}} \qquad (q \in |R^{+} \setminus \{1\})$$

heißen **Exponentialfunktionen.**

Eigenschaften von Exponentialfunktionen:

1. für jede Exponentialfunktion gilt:

   a: der Graph der Funktion
   - steigt für $q > 1$, die Funktion ist streng monoton steigend
   - sie fällt für $0 < q < 1$, die Funktion ist streng monoton fallend

   b: der Graph liegt oberhalb der x-Achse, daraus folgt: die Menge aller Funktionswerte ist R^{+}

   c: der Graph approximiert
   - den negativen Teil der x-Achse für $q > 1$
   - den positiven Teil der x-Achse für $0 < q < 1$

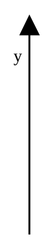
Praktische Anwendung der Exponentialfunktionen:
- Kapitalanlagen
- Pflanzenwuchs
- Gleichmäßiges Wachstum
- Zerfall von Stoffen

Beachte: *Im Unterschied zu den Potenzfunktionen ist bei Exponentialfunktionen die* ***Hochzahl variabel.***

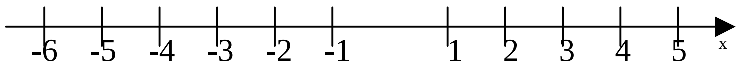
Beispiel:

Die Funktion $\mathbf{x \longrightarrow 2^{x}}$; $x \in |R$ heißt **Exponentialfunktion zur Basis 2.**
Für diese Funktion gilt:

(1) Der Graph steigt; die Funktion ist streng monoton wachsend.
(2) Der Graph liegt oberhalb der 1. Achse. Die Funktion nimmt jede positive reelle Zahl als Funktionswert an.
Für $x < 0$ ist $0 < 2^{x} < 1$,
für $x = 0$ ist $2^{x} = 1$,
für $x > 0$ ist $2^{x} > 1$.
(3) Der Graph schmiegt sich an den negativen Teil der 1. Achse an. Die 1. Achse ist *Asymptote* des Graphen.
(4) Jedesmal, wenn x um s wächst, wird der Funktionswert 2^{x} mit 2^{s} multipliziert.



JPL0709@aol.com



Stelle	Funktionswert	
x	2^x	
+ s		$* \, 2^s$
$x+s$	$2^{x+s} = 2^x * 2^s$	

bei unterschiedlicher Wahl der Basis wird der Graph der Funktion gestreckt oder gestaucht. Siehe oben !!!

Lineares Wachstum einer Größe y:

Zu gleichen Zeitspannen gehört immer eine Zunahme der Größe y um den gleichen Betrag.
Funktionsgleichung der Funktion *Zeit x* ⟶ *Größe y:* $y = mx + b$

Exponentielles Wachstum einer Größe y:

Zu gleichen Zeitspannen gehört immer eine Vervielfachung der Größe y mit dem gleichen Faktor b (*Wachstumsfaktor*).
Funktionsgleichung der Funktion *Zeit x* ⟶ *Größe y:* $y = a * b^x$

Logarithmusfunktionen:

Gegeben seien zwei positive Zahlen y und q (wobei q = 1). Wir suchen diejenige (Hoch-)Zahl x, mit der man q potenzieren muß, um y zu erhalten: $y = b^x$.

Diese Zahl x heißt der Logarithmus von y zur Basis q; Bezeichnung: $x = \log_b y$.

Logarithmengesetze:

(L1): $\log_b (u * v) = \log_b u + \log_b v$ (für $u, v \in \mathbb{R}^+$)
Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

JPL0709@aol.com

(L2): $\log_b (u^t) = t * \log_b u$ (für $u , t \in$ |R$^+$)
Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus der Hochzahl und dem Logarithmus der Basiszahl.

(L1*): $\log_b (^u/_v) = \log_b u - \log_b v$ (für $u , v \in$ |R$^+$)
Der Logarithmus eines Bruches (Quotienten) ist gleich der Differenz des Logarithmus des Zählers und des Logarithmus des Nenners.

<u>Eigenschaften von Logarithmusfunktionen</u>:

Für jede Logarithmusfunktion x wird zugeordnet $\log_b x$; $x \in$ |R$^+$ mit $b > 1$ gilt:

(1) Der Graph steig; die Funktion ist streng monoton steigend
(2) Die menge aller Funktionswerte ist |R. Es gilt

$\log_b x < 0$ für $0 < x < 1$
$\log_b x = 0$ für $x = 1$
$\log_b x > 0$ für $x > 1$

(3) Der Graph approximiert den negativen Teil der Y-Achse.
(4) Die Graphen aller Logarithmusfunktionen haben den Punkt P (1;0) und nur diesen Gemeinsam.

Graph der o.g. Logarithmusfunktion:

Die Lorarithmusfunktion ist eine Umkehrung der Exponentialfunktion. Gegeben seien zwei positive Zahlen y und b (b ungleich 1). Es wird die (Hoch-) Zahlx gesucht, mit der man b potenzieren muß um y zu erhalten.

<u>Übungsaufgabe:</u>

Eine Größe y wachse exponentiell. In der Zeiteinheit $x = 1$ wachse sie an mit dem Faktor b. Zum Zeitpunkt $x = 0$ habe sie den Wert a.

a) Fülle die Tabelle aus.
b) Zeige: Zum Zeitpunkt x hat die Größe y den Wert $y = a * b^x$

JPL0709@aol.com

Zeit	Größe y
0	a
1	[ ]
2	[ ]
3	[ ]
.	
.	
.	
x	[ ]