

Exponentialfunktionen

Definition: Zuordnungen der Form

$$x \longrightarrow q^x \quad (q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

heißen **Exponentialfunktionen**.

Eigenschaften von Exponentialfunktionen:

1. für jede Exponentialfunktion gilt:
 - a: der Graph der Funktion
 - steigt für $q > 1$, die Funktion ist streng monoton steigend
 - sie fällt für $0 < q < 1$, die Funktion ist streng monoton fallend
 - b: der Graph liegt oberhalb der x-Achse, daraus folgt: die Menge aller Funktionswerte ist \mathbb{R}^+
 - c: der Graph approximiert
 - den negativen Teil der x-Achse für $q > 1$
 - den positiven Teil der x-Achse für $0 < q < 1$

Praktische Anwendung der Exponentialfunktionen: - Kapitalanlagen
 - Pflanzenwuchs
 - Gleichmäßiges Wachstum
 - Zerfall von Stoffen

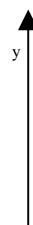
Beachte: Im Unterschied zu den Potenzfunktionen ist bei Exponentialfunktionen die **Hochzahl variabel**.

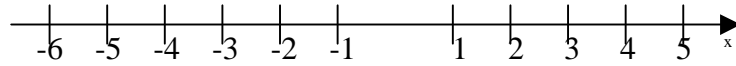
Beispiel:

Die Funktion $x \longrightarrow 2^x$; $x \in \mathbb{R}$ heißt **Exponentialfunktion zur Basis 2**.

Für diese Funktion gilt:

- (1) Der Graph steigt; die Funktion ist streng monoton wachsend.
- (2) Der Graph liegt oberhalb der 1. Achse. Die Funktion nimmt jede positive reelle Zahl als Funktionswert an.
 Für $x < 0$ ist $0 < 2^x < 1$,
 für $x = 0$ ist $2^x = 1$,
 für $x > 0$ ist $2^x > 1$.
- (3) Der Graph schmiegt sich an den negativen Teil der 1. Achse an. Die 1. Achse ist *Asymptote* des Graphen.
- (4) Jedesmal, wenn x um s wächst, wird der Funktionswert 2^x mit 2^s multipliziert.





Stelle	Funktionswert
x $+ s$ $x+s$	2^x $2^{x+s} = 2^x * 2^s$ $* 2^s$

bei unterschiedlicher Wahl der Basis wird der Graph der Funktion gestreckt oder gestaucht. Siehe oben !!!

Lineares Wachstum einer Größe y:

Zu gleichen Zeitspannen gehört immer eine Zunahme der Größe y um den gleichen Betrag.
 Funktionsgleichung der Funktion *Zeit x* → *Größe y*: $y = mx + b$

Exponentielles Wachstum einer Größe y:

Zu gleichen Zeitspannen gehört immer eine Vervielfachung der Größe y mit dem gleichen Faktor b (*Wachstumsfaktor*).
 Funktionsgleichung der Funktion *Zeit x* → *Größe y*: $y = a * b^x$

Logarithmusfunktionen:

Gegeben seien zwei positive Zahlen y und q (wobei $q \neq 1$). Wir suchen diejenige (Hoch-)Zahl x, mit der man q potenzieren muß, um y zu erhalten: $y = b^x$.

Diese Zahl x heißt der Logarithmus von y zur Basis q; Bezeichnung: $x = \log_b y$.

Logarithmengesetze:

(L1): $\log_b (u * v) = \log_b u + \log_b v$ (für $u, v \in \mathbb{R}^+$)
 Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

(L2): $\log_b (u^t) = t * \log_b u$ (für $u, t \in \mathbb{R}^+$)

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus der Hochzahl und dem Logarithmus der Basiszahl.

(L1*): $\log_b (u/v) = \log_b u - \log_b v$ (für $u, v \in \mathbb{R}^+$)

Der Logarithmus eines Bruches (Quotienten) ist gleich der Differenz des Logarithmus des Zählers und des Logarithmus des Nenners.

Eigenschaften von Logarithmusfunktionen:

Für jede Logarithmusfunktion x wird zugeordnet $\log_b x$; $x \in \mathbb{R}^+$ mit $b > 1$ gilt:

- (1) Der Graph steigt; die Funktion ist streng monoton steigend
- (2) Die Menge aller Funktionswerte ist \mathbb{R} . Es gilt

$$\log_b x < 0 \text{ für } 0 < x < 1$$

$$\log_b x = 0 \text{ für } x = 1$$

$$\log_b x > 0 \text{ für } x > 1$$

- (3) Der Graph approximiert den negativen Teil der Y-Achse.
- (4) Die Graphen aller Logarithmusfunktionen haben den Punkt P (1;0) und nur diesen Gemeinsam.

Graph der o.g. Logarithmusfunktion:

Die Logarithmusfunktion ist eine Umkehrung der Exponentialfunktion. Gegeben seien zwei positive Zahlen y und b (b ungleich 1). Es wird die (Hoch-) Zahl x gesucht, mit der man b potenzieren muß um y zu erhalten.

Übungsaufgabe:

Eine Größe y wachse exponentiell. In der Zeiteinheit $x = 1$ wachse sie an mit dem Faktor b . Zum Zeitpunkt $x = 0$ habe sie den Wert a .

- a) Fülle die Tabelle aus.
- b) Zeige: Zum Zeitpunkt x hat die Größe y den Wert $y = a * b^x$

