Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

arithmetische Folgen:

Definition:

$$\left\langle c_k \cdot n^k + c_{k-1} \cdot n^{k-1} + \ldots + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0 \right\rangle_{n \in D}$$

mit $D \leq N_0, k \in N_0, c_i \in R \forall i = 0 \ldots k$

Eigenschaften:

$$a_{n+1} - a_n = k$$
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot k$$
$$a_t - a_n = (t-n) \cdot k$$

arithmetische Folge 1.Ordnung:

$$\langle c_1 \cdot n + c_0 \rangle = \langle k \cdot n + d \rangle$$

Bei arithmetischen Folgen der Ordnung k,
ist die k-te Differenzenfolge eine konstante Folge:

$$\langle k \cdot n + d \rangle_{n \in N_0}$$

a_n	d		k+d		2·k+d		3·k+d.....
Δa_n		k		k		k......	

praktisches Bsp.:

Frage: Welche Ordnung hat die Folge $\langle 1,0,1,4,9,\ldots \rangle$:

a_n	1		0		1		4	9
Δa_n		-1		1		3		5
$\Delta^2 a_n$			2		2		2	

Antwort: $\langle c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0 \rangle \Rightarrow$ arithmetische Folge 2.Ordnung.

Differenzenschema in umgekehrter Richtung:

	S_0		S_1	S_2		S_3		S_4
a_0	0		a_1	a_1+a_2		$a_1+a_2+a_3$		$a_1+a_2+a_3+a_4$.......
a_n		a_1		a_2	a_3		a_4........	
Δa_n			a_2-a_1	a_3-a_2		a_4-a_3		a_5-a_4.......

Summenformel: $S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Summe der ersten n Glieder: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

geometrische Folgen:

Definition:

$$b_n = \langle b_1 \cdot q^{n-1} \rangle_{n \in N}$$

Eigenschaften:

1.) $\forall n : \frac{b_n}{b_{n-1}} = q$ Der Quotient 2-er aufeinanderfolgender Glieder ist konstant.

2.) $\forall n, m : \frac{b_n}{b_m} = q^{n-m}$

3.) $\forall n : b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ Jedes Folgenglied ist das geometrische Mittel seiner Nachbarn.

4.) Summenformel:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = \left\{ \begin{matrix} n \cdot b_1 & \text{für} & q = 1 \\ b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} & \text{für} & q \neq 1 \end{matrix} \right\}$$

5.) unendliche geometrische Reihe:

$$\lim_{n \to \infty}(s_n) = \frac{b_1}{1 - q}$$

n-Faktorielle:

n!=1·2·3·4·5·6·...· (n-1) ·n

Beispiel.:

5!=1·2·3·4·5=120

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

Grenzwerte von Folgen:

Definition: $a \in R, \varepsilon \in R^+$

$$U_\varepsilon(a) = \{x \| x - a| < \varepsilon\}_R = \{x | -\varepsilon < x - a < \varepsilon\}_R = \{x | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}_R$$

nennt man ε-Umgebung von a.

Häufungspunkt (HP) :

$\langle x_n \rangle_{n \in N}$

x heißt HP, wenn in jeder ε-Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : x_n \in U_\varepsilon(x)$ für unendlich viele n.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : |x - x_n| < \varepsilon$ für unendlich viele n.

Definition von "fast alle"- Grenzwert (GW):

fast alle: Alle bis auf endlich viele.

$a \in R, \text{Folge} \langle a_n \rangle_{n \in D}$

a heißt GW der Folge, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.

man sagt:"Die Folge a von n konvergiert gegen a."

Schreibweise: $\lim_{n \to \infty}(a_n) = a$

eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

$$a = \lim_{n \to \infty}(a_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \forall n > N : \begin{array}{l} |a_n - a| < \varepsilon \\ a_n \in U_\varepsilon(a) \end{array}$$

Unterschied zwischen GW und HP:

a = HP in jeder Umgebung liegen **unendlich viele** Folgenglieder.
a = GW in jeder Umgebung liegen **fast alle** Folgenglieder.

→ Jeder GW ist auch ein HP, aber nicht jeder HP ist ein GW.

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

Grenzwerte von Funktionen:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=1$$

Grenzwertsätze von Funktionen:

$$\lim(f_{(x)}) \pm \lim(g_{(x)}) = \lim(f_{(x)} \pm g_{(x)})$$
$$\lim(f_{(x)}) \cdot \lim(g_{(x)}) = \lim(f_{(x)} \cdot g_{(x)})$$

Spezialfall:

ist $g_{(x)} \neq 0 \forall x \in U_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}$ und ist $b = \lim\limits_{x\to x_0}(g_{(x)}) \neq 0$ dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right)=\frac{a}{b}$$

Bemerkung: wie bei Folgen gilt:

a) ist b=0 und $a \neq 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right)$ existiert nicht!

b) ist b=0 und a=0 => gesonderte Untersuchung!

Einseitige Grenzwerte:

Definition:

1.) existiert der GW für $\lim(f(x_0 + h)$ für h>0, so nennt man ihn **rechtsseitige GW** der Funktion f an der Stelle x_0.

Schreibweisen:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ h>0}}(f(x_0 + h)) = \lim_{h\to 0^+}(f(x_0 + h))$$

2.) existiert der GW für $\lim(f(x_0 + h)$ für h<0, so nennt man ihn **linksseitiger GW** der Funktion f an der Stelle x_0.

Schreibweisen:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ h<0}}(f(x_0 + h)) = \lim_{h\to 0}(f(x_0 + h))$$

3.) Sind linksseitiger und rechtsseitiger GW identisch, so existiert der GW an der Stelle und hat den selben Wert.

Uneigentliche Grenzwerte: (GW für $x \to \pm\infty$)

Definition:

1.) $\lim\limits_{x\to\infty}(f_{(x)}) = \lim\limits_{x\to\infty^-}(f_{(x)}) := \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

2.) $\lim\limits_{x\to\infty}(f_{(x)}) = \lim\limits_{x\to-\infty^+}(f_{(x)}) := \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

<u>Stetigkeit einer Funktion:</u>

Definition:

$$\lim_{x \to x_0} f_{(x)} = f_{(x_0)} = f(\lim_{x \to x_0}(x))$$

in Worten:

1.) Eine Funktion heißt stetig an der Stelle x_0, wenn an dieser Stelle der Funktions- und Grenzwert übereinstimmen.
Bei stetigen Funktion läßt sich Funktions- und Grenzwertbildung vertauschen.

2.) Sind GW und FW an der Stelle x_0 verschieden oder existiert einer der beiden Werte nicht, so ist die Funktion unstetig.

3.) Eine Funktion ist in einem Intervall stetig, wenn sie in jedem Punkt des Intervalles stetig ist.

Stetig sind folgende spezielle Funktionen:

- konstante Funktion
- identische Funktion
- Exponentialfunktion
- Sinusfunktion

weiters gilt:

- Die Summe, Differenz und das Produkt stetiger Funktion sind stetig.
- Die Quotienten stetiger Funktion bei Nenner ungleich 0 sind stetig.
- Verkettungen (Hintereinanderausführungen) stetiger Funktion sind stetig.
- Existiert zu einer stetigen Funktion eine Umkehrfunktion, so ist auch diese stetig.

Allgemeine Merkregel:

Alle Funktionen, die man - ohne abzusetzen - unter einmal zeichnen kann, sind stetig!

<u>Stetige Ergänzung von Funktionen:</u>

Funktion f: $D\backslash\{x_0\} \to R$ sei stetig in $D\backslash\{x_0\}$

der GW $\lim_{x \to x_0}(f_{(x)})$ existiere.

Dann ist $\bar{f} : D \to R$

$$x \; \alpha \; \bar{f}_{(x)} := \begin{cases} \lim_{x \to x_0}(f_{(x)}) & \text{für } x = x_0 \\ f_{(x)} & \text{für } x \neq x_0 \end{cases}$$

stetig in ganz D und heißt stetige Ergänzung von f an der Stelle x_0.

Stetige Ergänzung ist nur bei LÜCKEN machbar!

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

Die Differentialrechnung

Differenzierbarkeit

Ableitung einer Funktion an einer Stelle x0 (”Lokale Differenzierbarkeit”).

Definition:

$$f : D \to R$$
$$x \to f_{(x)}$$
$$x_0, x_1 \in U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$$
$$x_1 - x_0 := \Delta x = h$$

1.) $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ heißt **Differentialquotient** von f an der Stelle x_0 und x_0+h.

2.) $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

heißt **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0.

Ableitungsfunktion von f:

y=f(x)

$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} f(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Einseitige Differenzierbarkeit:

rechtsseitige Ableitung: $f_r'(x) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

linksseitige Ableitung: $f_l'(x) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

f ist differenzierbar an der Stelle $x_0 \Leftrightarrow$ f ist stetig in x_0, wenn $f_l'(x_0)$ und $f_r'(x_0)$ existieren und $f_l'(x_0) = f_r'(x_0)$ ist.

physikalische Anwendungsbeispiel:

Lotrechter Wurf: $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

Durchschnittsgeschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ => nach längerer

Umformung => $\bar{v} = v_0 - g \cdot t - \frac{g}{2} \cdot \Delta t$

Momentangeschwindigkeit: $\lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (v_0 - g \cdot t - \frac{g}{2} \cdot \Delta t = v_0 - g \cdot t$

Durchschnittsbeschleunigung: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = -g$

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

Formeln für die Differentialrechnung:

allgemeine Regeln für die Verknüpfungen von Funktionen:

Ableitung

- für eine Summe / Differenz:

$f(x) := u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v(x)$

- für eine Multiplikation:

$: f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

- für eine Division:

$f(x) := \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

- der verketteten Funktion:

$f(x) := u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

- Ableitung der Umkehrfunktion:

$y := f^*(x) \rightarrow y' = \frac{1}{f'(f^*(x))}$

Ableitung spezieller Funktionen:

- Ableitung der konstanten Funktion:

$y := c \rightarrow y' = 0$

- Ableitung der identischen Funktion:

$y := x \rightarrow y' = 1$

- Ableitung anderer Funktionen:

$y := x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$

$y := a^x \rightarrow y' = a^x \cdot \ln(a)$

$y := e^x \rightarrow y' = e^x$

$y := {}_a\log(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$y := \ln(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x}$

$y := \sin(x) \rightarrow y' = \cos(x)$

$y := \cos(x) \rightarrow y' = -\sin(x)$

$y := \tan(x) \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$y := \cot(x) \rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$

gleiche Formeln für sinh(x), cosh(x), tanh(x), coth(x)!

$y := \arcsin(x) \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y := \arccos(x) \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y := \arctan(x) \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

$y := \operatorname{arccot}(x) \rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$

$y := \operatorname{ar}\sinh(x) \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$y := \operatorname{ar}\cosh(x) \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$y := \operatorname{ar}\tanh(x) \rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}$

$y := \operatorname{ar}\coth(x) \rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}$

Das totale Differential:

Def.:

Für eine diff. bare Fkt. f: D→ W bezeichnet man $dy := df_{(x)} := f'_{(x)}\,dx$ als totales Differential.

Das totale Differential gibt die Ordinatenänderung der Tangente von der Fkt. f an, wenn die Abszissenänderung dx beträgt.

Für kleine dx stellt dy die 1. Änderung des Fkts.-Wertes dar.

Linearisierungsformel:

$$f_{(x+dx)} \approx f_{(x)} + dy = f_{(x)} + f'_{(x)} \cdot dx \quad \text{oder} \quad f_{(x+h)} \approx f_{(x)} + f'_{(x)} \cdot h$$

Anwendung: Näherungsverfahren (siehe später), Fehlerberechnung:

absolute Fehler: | Fehler von y | = $\Delta y = dy \approx \left|f'_{(x)}\right| \cdot |\Delta x|$

relative Fehler: $\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{f'_{(x)}}{f_{(x)}}\right| \cdot |\Delta x| \cdot 100\%$

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

Näherungsmethoden:

Newton'sche Näherungsverfahren:

Definition:

$x_n \in D$ heisst k - fache Nullstelle einer Funktion $f :\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{a) } \lim_{x \to x_n} \frac{f_{(x)}}{(x - x_n)^l} = 0 \ \forall\, l \in \{0,1,2,3,\ldots, k-1\}$$

$$\text{b) } \lim_{x \to x_n} \frac{f_{(x)}}{(x - x_n)^k} \neq 0$$

$\Rightarrow x_N$ ist eine Nullstelle.

Satz: Newton'sche Näherungsverfahren:

Hat eine diff.bare Funktion f bei $x_n \in D_f$ eine einfache Nullstelle, so gibt es ein $x_0 \in D$, sodaß die (rekrusive) Folge $\langle x_n \rangle_{n \in N}$ mit

$x_{n+1} := x_n - \dfrac{f_{(x_n)}}{f'_{x_n}}$ $(n \in N_0)$ gegen die Nullstelle x_n konvergiert.

Kriterium zur Wahl des Startwertes:

In einer Umgebung von x_n, in der alle Näherungswerte $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ liegen muss gelten:

$$\left| \frac{f_{(x)} \cdot f''_{(x)}}{(f'_{(x)})^2} \right| \leq m < 1$$

Mittelwertsätze der Differentialrechnung:

Satz von ROLLE: Ist $f : [a, b] \to R$ stetig und in $]a, b[$ diff.bar und gilt $f_{(a)} = f_{(b)}$, so existiert mindestens ein $x_0 \in\,]a, b[$ mit $f'_{(x_0)} = 0$.

Mittelwertsatz:

Ist $f : [a, b] \to R$ stetig und in $]a, b[$ diff.bar, dann existiert min. ein $x_0 \in\,]a, b[$ mit $f'_{(x_0)} = \dfrac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a}$

Linearisierungsformel:

$$f_{(x+h)} = f_{(x)} + h \cdot f'_{(x_0)}$$

Näherungsformeln (bei $x << |1|$):

$$(1+x)^n \cong 1 + n \cdot x \qquad \cos(x) \cong 1$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cong 1 - n \cdot x \qquad \tan(x) \cong x$$

$$\sqrt[n]{1+x} \cong 1 + \frac{1}{n} \cdot x \qquad e^x \cong 1 + x$$

$$\sin(x) \cong x \qquad \ln(1+x) \cong x$$

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

Regel von de l'Hospital:

Unbestimmte Form $\frac{"0"}{0}$:

Regel:

$f:]a,b[\to R$

$x \alpha \; f_{(x)} = \frac{Z_{(x)}}{N_{(x)}}$

Vorraussetzungen (VS): 1.) Z, N stetige Fkt. in [a, b]

diff.bar in]a, b[

2.) $N_{(x)} \neq 0, N'_{(x)} \neq 0$ in]a, b[

3.) $\lim_{x \to a} Z_{(x)} = \lim_{x \to a} N_{(x)} = 0$

4.) $\lim_{x \to a} \frac{Z'_{(x)}}{N'_{(x)}}$ existiert

$\Rightarrow$ wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann gilt: $\lim_{x \to a} f_{(x)} = \frac{Z_{(x)}}{N_{(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{Z'_{(x)}}{N'_{(x)}}$

UnbestimmteForm $\frac{"\infty"}{\infty}$:

sind für $f:]a,b[\to R$ die VS1,2 und 4 und ist statt der 3. VS jetzt $\lim_{x \to a} Z_{(x)} = \lim_{x \to a} N_{(x)} = \infty$, so gilt:

$\lim_{x \to a} f_{(x)} = \frac{Z_{(x)}}{N_{(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{Z'_{(x)}}{N'_{(x)}}$

Die restlichen unbestimmten Formen sind erst auf die Form $\frac{"0"}{0}$ oder $\frac{"\infty"}{\infty}$ zu bringen.

Form "$0 \cdot \infty$":

$$f_{(x)} = \lim_{x \to a} g_{(x)} \cdot \lim_{x \to a} h_{(x)} = "0 \cdot \infty" \Rightarrow \lim_{x \to a} \left(\frac{g_{(x)}}{\frac{1}{h_{(x)}}} \right) = \frac{"0"}{0} \text{ bzw.: } \lim_{x \to a} \left(\frac{h_{(x)}}{\frac{1}{g_{(x)}}} \right) = \frac{"\infty"}{\infty}$$

Form "$\infty - \infty$":

$$\lim_{x \to a} (g_{(x)} - h_{(x)}) = "\infty - \infty" \Rightarrow \lim_{x \to a} \left(\frac{\frac{1}{h_{(x)}} - \frac{1}{g_{(x)}}}{\frac{1}{g_{(x)}} \cdot \frac{1}{h_{(x)}}} \right) = \frac{"0"}{0}$$

Bei den Formen "0^0", "∞^0", "1^∞" gilt: $\lim_{x \to a} f_{(x)} = \lim_{x \to a} g_{(x)}{}^{h_{(x)}} \Rightarrow$ exp.Fkt. $\Rightarrow \lim_{x \to a} \left(e^{h_{(x)} \cdot \ln(g_{(x)})} \right) = e^{\lim_{x \to a} (h_{(x)} \cdot \ln(g_{(x)}))}$

$\Rightarrow$ nun wird in einer Nebenrechnung $\lim_{x \to a} (h_{(x)} \cdot \ln(g_{(x)}))$ berechnet, das jetzt die Form "$0 \cdot \infty$" hat (siehe oben).

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

Kurvendiskussion:

Die Kurvendiskussion setzt sich zusammen aus:

a) Definitionsmenge
b) Ausnahmestellen ➔ Pole, Lücken?
c) Nullstellen
d) Extremwerte ➔ Tiefpunkte, Hochpunkte?
e) Wendepunkte
f) Wendetangente (nur wenn Wendepunkte vorhanden sind)
g) graphische Darstellung

a) wo ist die Fkt. nicht def.? Nenner-Nullstellen?
b) wo die Funktion nicht definiert ist (siehe a)), muß untersucht werden, ob es sich hier um eine Lücke (kein FW, aber GW vorh.) handelt, oder um einen Pol (kein FW und GW vorh).
c) Nullstellen findet man, indem man f(x):=0 setzt bzw. mit Näherungsverfahren (siehe NEWTON-Verfahren)
d) Extremwerte sind vorh., wenn gilt: $f'_{(x)} = 0 \wedge f''_{(x)} \neq 0$

$\rightarrow f''_{(x)} < 0 \Rightarrow \text{lokles Maximum (Hochpunkt)}$

$\rightarrow f''_{(x)} > 0 \Rightarrow \text{lokles Minimum (Tiefpunkt)}$

e) Wendepunkte sind vorh., wenn gilt: $f''_{(x)} = 0 \wedge f'''_{(x)} \neq 0$
f) wenn e) vorh., gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \tan(\alpha) = k = f'_{(x)} \\ y = f_{(x)} = k \cdot x + d \end{array}\right\} \Rightarrow d$$

$$\Rightarrow t_{(x)} = k \cdot x + d$$

g) nun zeichnet man alle schon bekannten Punkte in einer Graphik ein und verbindet sie nach besten Wissen und Gewissen.

Extremwertaufgaben:

Vorgangsweise:

1.) Aufstellen der Zielfunktion. Das ist jene Funktion die einen Extremwert annehmen soll. Diese Größe hängt aber im allgemeinen von mehreren Variablen ab.
⇨ $y=f(x_1,x_2,x_3,...,x_{n-1},x_n)$.
2.) Aufstellen von (n-1) – Nebenbedingungen. Dadurch können (n-1) – Variablen aus der Zielfunktion eliminiert werden.
⇨ y=f(x)
3.) Den Definitionsbereich festlegen.
4.) differenzieren der Zielfunktion.
5.) Nullstellen der Ableitung suchen.
6.) Untersuchung, ob die gefundene Nullstelle ein Minimum oder Maximum ist. Dies erkennt man in der 2. Ableitung.
7.) Berechnung der übrigen Bedingungen.

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

8.) Extremwert der gesuchten Größe berechnen.

Kurven in Parameterdarstellung:

Definition:

$$I \subseteq R \text{ Intervall}$$

$$\text{ebene Kurve:}$$

$$f : I \rightarrow R^2$$

$$t \rightarrow f_{(t)} := (x_1(t), x_2(t)) \text{ bzw.:} (x(t), y(t))$$

$$t \text{...Parameter}$$

$$\text{räumliche Kurve:}$$

$$f : I \rightarrow R^3$$

$$t \, \alpha \;\; f_{(t)} := (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \text{ bzw.:} (x(t), y(t), z(t))$$

Bemerkung:

$$g : I \rightarrow R$$

$$x \, \alpha \;\; y := g(x)$$

Funktion läßt sich affassen, als verkürzte Schreibweise in Parameterdarstellung:

$$f : I \rightarrow R^2$$

$$t \, \alpha \;\; f_{(t)} := (t, g(t))$$

$$x := t$$

→ Funktion = Spezialfall einer ebenen Kurve.
Durch Eliminieren des Parameters gelingt es oft, eine Parameterfreie Form zu erhalten.

2 Prinzipielle Vorgangsweisen beim Eliminieren:

a) Kreisgleichung:

$$f : [0,2\pi] \rightarrow R^2$$

$$t \, \alpha \;\; f_{(t)} := (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow x = x(t) &:= r \cdot \cos(t) \, /^2 \\ y = y(t) &:= r \cdot \sin(t) \, /^2 \end{aligned}\right\} +$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

b) Parabel

$$f : [-5,5] \rightarrow R^2$$

$$t \, \alpha \;\; f_{(t)} := \left(\sqrt{2 \cdot p} \cdot t, t^2\right)$$

$$\Rightarrow x = x(t) := \sqrt{2 \cdot p} \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{\sqrt{2 \cdot p}}$$

$$y = y(t) := t^2 \Rightarrow \text{eingesetzt:} \frac{x^2}{2 \cdot p}$$

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

polare Parameterdarstellung:

Neben der kartesischen Parameterdarstellung (=Angabe von x und y Koordinaten) gibt es auch die Möglichkeit einen Punkt durch Angabe von Betrag (=Abstand zum Ursprung) und Winkel, gemessen von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn, festzulegen.

polare Parameterdarstellung einer ebenen Kurve:

$$f: I \to R_0^+ \text{ x } R$$
$$t \mapsto f_{(t)} := (r(t); \varphi(t))$$

Unterscheidungsmerkmal: Bei der **polaren Parameterdarstellung** werden die Werte Betrag und Winkel durch "**;**" getrennt!

Umrechnung von kartesisches System in polare Parameterdarstellung:

$$r = r(t) := \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$
$$\varphi = \varphi(t) := \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$$

Umrechnung von polarer Parameterdarstellung in kartesisches System:

$$x = x(t) := r(t) \cdot \cos(\varphi(t))$$
$$y = y(t) := r(t) \cdot \sin(\varphi(t))$$

Differation von Kurven in Parameterdarstellung

$$\frac{d}{dx} f_{(x)} = f'_{(x)}$$

unabhängige Variable ist jetzt t: $\frac{d}{dt} x_{(t)} = \dot{x}_{(t)} \quad \frac{d}{dt} y_{(t)} = \dot{y}_{(t)}$

Richtung der Tangente:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}\tan(t) + r}{\dot{r} - r \cdot \tan(t)} = \frac{r'(\varphi) \cdot \tan(\varphi) + r(\varphi)}{r'(\varphi) - r(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}$$

$$y'' = \frac{1}{\dot{x}} \cdot \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{1}{\dot{x}^3} \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}$$

Michael Prieth <michael.p@gmx.net>

Krümmung, Krümmungskreis

Definition:

1.) Ein Kreis, der in einem Punkt $(x_0, f_{(x_0)})$ einer Funktion $f_{(x)}$ in der 1. und 2. Ableitung mit der Funktion übereinstimmt heißt Krümmungskreis, Schmiegekreis.

2.) Die Kurve auf der die Mittelpunkte aller Krümmungskreise an einer Funktion liegen, nennt man **EVOLUTE** dieser Funktion.

3.) Die Ursprüngliche Funktion nennt man dann **EVOLVENTE** dieser Evolute.

Berechnung des Krümmungskreises an eine Funktion $y=f_{(x)}$ im Punkt $P(x_0/f_{(x_0)})$.

gesucht: x_M, y_M, ρ

$$\Rightarrow \qquad x_M = x_0 - f'_{(x_0)} \cdot \frac{1+(f'_{(x_0)})^2}{f''_{(x_0)}} = x(t) - \dot{y} \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}$$

$$y_M = f_{(x_0)} + \frac{1+(f'_{(x_0)})^2}{f''_{(x_0)}} = y(t) + \dot{x} \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}$$

$$\rho = \frac{(1+(f'_{(x_0)})^2)^{\frac{3}{2}}}{f''_{(x_0)}} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}$$

Bemerkung: ρ kann auch negativ werden $\Rightarrow f''_{(x_0)} < 0 \Rightarrow$ Krümmungskreis liegt UNTERHALB!

Definition: $\kappa := \frac{1}{\rho}$ heißt Krümmung.

Evolute: $e(t) := (x_M(t), y_M(t))$