Thomas Kirnhof

Näherungsverfahren zur Berechnung von Nullstellen

Das Newtonsche Iterationsverahren

1. Dieses Verfahren der Nullstellenanäherung macht von der Tatsache Gebrauch, dass der Funktionsgraph einer differenzierbaren Funktion in einer Umgebung $U(x_1)$ durch die Tangente im Punkte $P_1(x_1|f(x_1))$ approximiert wird.
Gelingt es einen Wert x_1 zu finden, dessen Funktionswert schon "nahe" bei 0 liegt, so bestimmt man den Schnittpunkt der Tangente im Punkte P_1 der x-Achse. Man kann erwarten, dass die so ermittelte Stelle x_2 einen besseren Näherungswert für die gesuchte Nullstelle z darstellt als der Startwert x_1.

Für die Tangentenfunktion t zur Stelle x_1 gilt:

$$t(x) = f`(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

für die Nullstelle x_1 dieser Funktion gilt also:

$$t(x_2) = f`(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_1)$$

Falls $f`(x_1)$‡0 ist, ergibt sich daraus:

$$x_2 - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f`(x_1)}, \text{ also } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f`(x_1)}.$$

Durch die Berechnung von (x_2) kann man feststellen, ob x_2 tatsächlich näher bei der gesuchten Nullstelle z liegt. Ist dies der Fall, so kann man das Verfahren zur Berechnung weiterer Näherungswerte wiederholen:

$$x_3 - x_2 = -\frac{f(x_2)}{f`(x_2)}, \quad x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f`(x_3)}, \text{ usw.}$$

Auf diese Weise erhält man eine Folge von Näherungswerten x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ... Der Wert x_{n+1} ergibt sich aus dem vorhergehenden Wert x_n nach der Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f`(x_n)}$$

Wenn der Ausgangswert x_0 ausreichend nahe bei der tatsächlichen Nullstelle z liegt, kann man erwarten, dass die Folge x_n dieser Zahl z schließlich beliebig nahe kommt. Die Folge x_1, x_2, ..., x_n strebt einem Grenzwert zu. So ist z also der Grenzwert der Folge x_n, so das gilt: $\lim\limits_{n \alpha \infty} x_n = z$.

Isaac Newton - zur Person

- englischer Physiker, Mathematiker und Astronom
- 1643 in Woolsthorpe bei Grantham (winziges Dorf) geboren
- 1727 in Kensington verstorben
- Sohn eines Landpächters
- 1699 bis 1701 Professor in Cambridge
- seit 1671 Mitglied und seit 1703 Professor der Royal Society
- 1699 Direktor der Münze
- N. entwickelte die binomische Reihe, die Theorie der Differential- und Integralrechnung
- lieferte Beiträge zur Algebra und erfand die Infinitesimalrechnung
- in der Optik arbeitete N. über die Dispersion des Lichtes, er war derjenige der bei Experimenten an Glasprismen erkannte, dass sich weißes Licht aus versch. Spektralfarben zusammensetzt
- im Gegensatz zu Huygens(Wellentheorie) war es nähmlich auch, der Licht als eine Bewegung schnell fliegender Teilchen deutete
- er entdeckte die Newtonschen Ringe und konstruierte 1668 ein Spiegeltleskop
- N. leitete aus Keplerschen Gesetzten das allg. Gravitations-gesetz ab => stellte Grundlage für Himmelsmechanik dar
- mit der von ihm aufgestellten Axiomatik der Mechanik wurde N. zum Begründer der klassischen Physik => die von ihm formulierten Gesetzmäßigkeiten galten uneinge-schränkt bis zur Entwicklung der Relativitätstheorie

Übungen und Aufgaben

1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens Näherungswerte für die Nullstellen von f.

a) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - 1$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x^2 + 2$

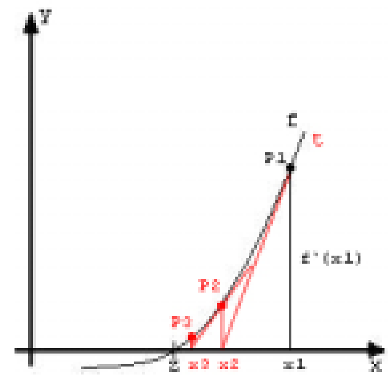
d) $f(x) = \arctan x - \sqrt{x}$

e) $f(x) = e^{-x^2} - x + 1$

f) $f(x) = x^2 - \ln x - 2$

Allgemein zum Iterationsverfahren

Das N.N. ist ein Verfahren zur Nullstellenbestimmung einer Funktion f(x), wenn für jede Stelle (x_0,y_0) die Ableitung y_0` gegeben ist. Bei jedem Schritt wird die Funktion ersetzt durch die Gerade durch den Punkt $(x_0,y_0)$ mit der Steigung $y_0$` falls y_0`‡ 0. Die Nullstelle $x_2 = x_1 - y_1/y_1$` ist eine Näherung an die Nullstelle von f(x). Dieser Schritt wird iterativ wiederholt. Bei Annäherung von x_i an die gesuchte Nullstelle x^* hat das N.N. quadratische Konvergenz, d.h. $|x^* - x_{i+1}| < K(x^* - x_i)^2$. Das N.N. läßt sich auf mehrere Dimensionen verallgemeinern. Sucht man zum Beispiel die Lösungen der Gleichungen $f_1(x,y) = 0$ und $f_2(x,y) = 0$, so bringt man an jeder Stützstelle die Tangentialebenen an diese Funktionen miteinander und mit der Ebene z = 0 zum Schnitt und erhält daraus einen Schätzwert für die gesuchte Nullstelle (x^*,y^*).


y
f
P1
f'(x1)
x1
x

Beispiel 2

Nicht in jedem Fall führt die Anwendung des Iterationsverfahrens zum Ziel.
Die Durchführung des Verfahrens ist einerseits abhängig vom, Funktionsverlauf und ob der Startwert x_1 ausreichend nahe genug bei der Nullstelle z liegt.

Eine Bedingung dafür, dass das Verfahren zum Ziel führt, ist das die Folge $x_1, x_2, ..., x_n$ einem Grenzwert zustrebt.
Bei der Durchführung des Verfahrens ist festzustellen, ob sich die Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ immer weniger unterscheiden, oder ob die Werte der Folge $f(x_1)$ $f(x_2), ..., f(x_n)$ der Zahl 0 immer näher kommen oder nicht.

Thomas Kirnhof

Das Newtonsche Iterationsverfahren

Näherungsverfahren zur Berechnung von Nullstellen

Für die Tangentenfunktion t zur Stelle x_1 gilt:

$$t(x) = f`(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

für die Nullstelle x_1 dieser Funktion gilt also:

$$t(x_2) = f`(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_1)$$

Falls f`(x_1)‡0 ist, ergibt sich daraus:

$$x_2 - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f`(x_1)}, \text{ also } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f`(x_1)}.$$

Weitere Berechnung der Näherungswerte:

$$x_3 - x_2 = -\frac{f(x_2)}{f`(x_2)}, \; x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f`(x_3)}, \text{ usw.}$$

Allgemeingültige Formel (Rekursionsgleichung):

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f`(x_n)}$$

Def.: Ist eine Funktion über einem Intervall [a,b] zweimal stetig differenzierbar, ist der Graph von f über [a;b] durchweg linksgekrümmt oder durchweg rechtsgekrümmt, gilt ferner f(a)* f(b)<0, so konvergiert nach dem Newtonverfahren für jeden Startwert x_1 E[a;b] die Folge x_n mit eben dieser Gleichung.

Thomas Kirnhof