

## Polynomfunktionen als Funktionsersatz

### Polynomfunktionen als e-Funktionsersatz

Wir wissen von der Herleitung von e, dass gilt:

$$e \approx (1+h)^{\frac{1}{h}} \text{ für } |h| \ll 1$$

$$\Rightarrow e^h \approx 1 + h$$

Damit ist die erste Näherung für  $e^x$ :  $e^x \approx 1 + x$  für  $|x| \ll 1$

Im Bild (S.88) können wir sehen, dass  $y = 1 + x$  Tangente an  $f(x) = e^x$  für  $x = 0$  ist, und außerdem  $f(x) = e^x$  immer, außer für  $x = 0$ , über der Tangente liegt.

$$\Rightarrow e^x > 1 + x$$

Eine bessere Näherung erhält man, indem man die Gerade durch eine Parabel ersetzt. Dadurch wird die Krümmung mit berücksichtigt.

Um diese zu finden schauen wir uns noch einmal die Tangente an. Sie stimmt nicht nur im Funktionswert, sondern auch in der 1. Ableitung mit dem Graphen der Funktion überein.

Für die Parabel fordern wir nun, dass diese auch in der 2. Ableitung mit dem Wert der 2. Ableitung von  $f(x) = e^x$  für  $x = 0$  übereinstimmt, so dass sie dort auch die gleiche Krümmung besitzt.

Ansatz:

$$p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0; \quad p_2(0) = a_0; \quad \exp(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$p_2'(x) = 2a_2 x + a_1; \quad p_2'(0) = a_1; \quad \exp'(0) = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$p_2''(x) = 2a_2; \quad p_2''(0) = 2a_2; \quad \exp''(0) = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \approx e^x$$

Nach dieser Betrachtung können wir vermuten, dass die Annäherung um so besser wird, je höher die Potenz der Polynomfunktion ist. Wir nehmen deshalb gleich ein Polynom n-ten Grades und verlangen, dass möglichst viele Ableitungen (n Stück) mit dem Funktionswert von  $f(x) = e^x$  für  $x = 0$  übereinstimmen.

Der Term des Polynoms n-ten Grades lautet dann:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow p_n(0) = a_0$$

Wir bilden die Ableitungen:

$$p_n'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \Rightarrow p_n'(0) = a_1$$

M

$$p_n^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot a_n x^{n-k} + \dots + a_k \Rightarrow p_n^{(k)}(0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot a_k$$

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  wird abgekürzt mit dem Symbol  $n!$  und bedeutet das Produkt aller natürlicher Zahlen von 1 bis  $n$ . Um dies noch zu vervollständigen, wurde noch  $1! = 1$  und  $0! = 1$  definiert.

Den Grund kann man an folgender Formel sehen:

$$n! = (n - 1)! \cdot n$$

Für  $n = 2$  gilt:

$$2! = 1 \cdot 2 = 2 \text{ und } 2! = (2 - 1)! \cdot 2 = 1! \cdot 2 \Rightarrow 1! = 1$$

Für  $n = 1$  gilt:

$$1! = (1 - 1)! \cdot 1 = 0! \cdot 1 \text{ und } 1! = 1 \Rightarrow 0! = 1$$

Für die  $k$ -te Ableitung unserer Polynomfunktion an der Stelle  $x = 0$  gilt also:

$$p_n^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$$

Da alle Ableitungen von  $f(x) = e^x$  für  $x = 0$  den Wert 1 haben muss also

$$k! \cdot a_k = 1 \text{ sein, und somit } a_k = \frac{1}{k!}$$

Die gesuchte Polynomfunktion  $n$ -ten Grades heisst also:

$$p_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{1}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \dots + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{0!} \approx e^x$$

kurz:

$$e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot x^k$$

### Polynomfunktion als sin-Funktionsersatz:

Ansatz (für  $n = 5$ ):

$$p_5(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$p_5'(x) = 5a_5 x^4 + 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

$$p_5''(x) = 20a_5 x^3 + 12a_4 x^2 + 6a_3 x + 2a_2$$

$$p_5'''(x) = 60a_5 x^2 + 24a_4 x + 6a_3$$

$$p_5^{(4)}(x) = 120a_5 x + 24a_4$$

$$p_5^{(5)}(x) = 120a_5$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$p(0) = a_0 \quad ; \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$$

$$p'(0) = a_1 \quad ; \quad f'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1$$

$$p''(0) = 2a_2 \quad ; \quad f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$$

$$\begin{aligned} p'''(0) &= 6a_3 & ; f'''(0) &= -1 & \Rightarrow a_3 &= -\frac{1}{6} \\ p^{(4)}(0) &= 24a_4 & ; f^{(4)}(0) &= 0 & \Rightarrow a_4 &= 0 \\ p^{(5)}(0) &= 120a_5 & ; f^{(5)}(0) &= 1 & \Rightarrow a_5 &= \frac{1}{120} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$$

Allgemein:

$$p_n^{(k)}(0) = k! \cdot a_k \quad (\text{siehe oben})$$

- da  $\sin x$  bei allen geradzahligen Ableitungen an der Stelle  $x = 0$  den Wert 0 hat folgt:

$$k! \cdot a_k = 0 \Rightarrow a_k = 0 \text{ für } k = 2z ; z \in \mathbb{IN}_0$$

- bei allen Ableitungen von  $\sin x$  mit  $k = 1 + 4z$  mit  $z \in \mathbb{IN}_0$  ist der Wert 1

$$\Rightarrow k! \cdot a_k = 1 \Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} \text{ für } k = 1 + 4z ; z \in \mathbb{IN}_0$$

- bei allen Ableitungen von  $\sin x$  mit  $k = 3 + 4z$  mit  $z \in \mathbb{IN}_0$  ist der Wert -1

$$\Rightarrow k! \cdot a_k = -1 \Rightarrow a_k = -\frac{1}{k!} \text{ für } k = 3 + 4z ; z \in \mathbb{IN}_0$$

$\Rightarrow$  Die gesuchte Polynomfunktion n-ten Grades heisst damit:

$$p_n(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + K$$

$$\text{oder } p_n(x) = (-1)^0 \frac{1}{1!}x + (-1)^1 \frac{1}{3!}x^3 + (-1)^2 \frac{1}{5!}x^5 + K + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} \approx \sin x \text{ mit } n = 2k+1$$

Kurz:

$$\sin x \approx \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!} \cdot x^{2i+1} \quad \text{mit } n = 2k + 1$$