Die Differentialgleichung :

Erstellt von Judith Ackermann

1.) Definition, Zweck

Als Differentialgleichungen bezeichnet man Gleichungen, die außer einer Funktion auch deren Ableitung enthalten. Mit Hilfe der Differentialgleichung können in der Physik viele verschieden Probleme gelöst werden. z.B.: die konstante Steigung, die Differentialgleichung heiß in diesem Falle einfach bloß : y’ = a , die allgemeine Lösung wäre hier schlicht y= ax+b (Die Stammfunktion) Diese einfache Form einer Differentialgleichung wird diesen meist gar nicht zugeordnet. Weitere durch Differentialgleichungen errechenbare Probleme sind die lineare Steigung der exponentielle Wachstum bzw. Zerfall, die harmonische Schwingung so wie die gedämpfte harmonische Schwingung.

1.1) verschiedene Arten von Differentialgleichungen

Man unterscheidet zwischen gewöhnlichen Differentialgleichungen, d.h. es tritt nur eine unabhängige Veränderliche auf, nur eine Funktion (z.B.: y = y’), partiellen Differentialgleichungen, welche mehrere Funktionen enthalten (z.B.: y = y’ + g (x)), auch als „Differentialgleichungen mit separierbaren Variablen“ bezeichnet, da man in ihnen zum Auffinden einer Lösungsfunktion die verschiedenen Variablen trennen muss. Weitere Formen von Differentialgleichungen sind Bernoullische Differentialgleichungen und riccatische Differentialgleichungen auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll.
Die Ordnung einer Differentialgleichung wird durch den Grad der höchsten auftretenden Ableitung bestimmt :

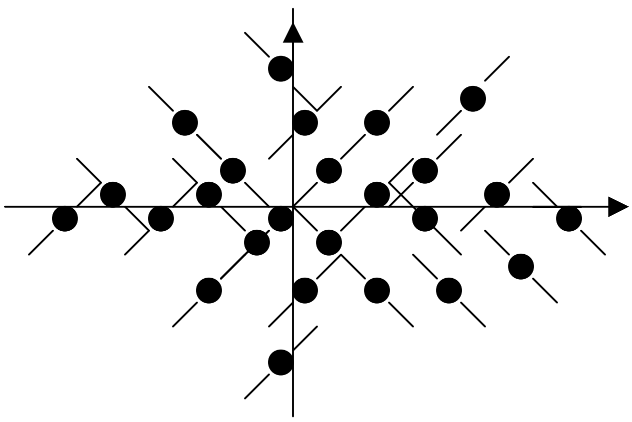
z.B.: $y = y' + 3$ >>>>> Differentialgleichung erster Ordnung

$y' = 5 - y''$ >>>>> Differentialgleichung zweiter Ordnung

$y = 7 + y^n$ >>>>> Differentialgleichung n-ter Ordnung

Im allgemeineren Fall der Differentialgleichung y’ = f (x,y) kann man eine erste Übersicht über die Lösungskurven mit Hilfe des *Richtungsfeldes* gewinnen: Dazu wird jedem Punkt (x,y) aus der Definitionsmenge von f eine Richtung $\tan\alpha = y'$ zugeordnet.

Richtungsfeld:



Die Lösungen von y’ = f(x,y) entsprechen dann Kurven (*Integralkurven*) die in jedem Punkt (x,y(x)) die durch y’ = f(x,y(x)) vorgeschriebene Steigung besitzen. Jedes Tripel $[(x, y(x), y'(x)]$ heißt *Linienelement,* und die Gesamtheit der Linienelemente heißt Richtungsfeld (s.o.) In geometrischer Hinsicht besteht die Aufgabe des Lösens einer

Differentialgleichung der Form y' = f (x,y) alle Kurven aufzufinden, die auf das Richtungsfeld passen.

2.) Beispiele und Lösungswege:

Ähnlich wie bei der Lösung von Integralen gibt es zur Lösung von Differentialgleichungen keine allgemeine erfolgreiche Methode.

2.1) gewöhnliche Differentialgleichungen....

Naheliegend ist die Umkehrung des Differenzierens, in dem man die Stammfunktion aufsucht, integriert. Die folgenden Beispiele verdeutlichen das Vorgehen

2.1.a) .... erster Ordnung

Beispiele:

Differentialgleichung: y' = 3 >>>>>> Lösungen: y = 3x
Y = 3x + 1 allgemein : $y = 3x + n$

>>>>> In diesem Falle ist die Lösungsfunktion einfach die Stammfunktion der Differentialgleichung <<<<<<<

vgl.: $y = \int 3$ >>>>> $y = 3x + c$

2.1.a.1) Die „exakte" Differentialgleichung:

Jede Differentialgleichung erster Ordnung y' = f(x,y), kann man in die Form einer linearen Differentialgleichung umschreiben:

Beispiel: $p(x)dx + q(y) = 0$

Man nennt dies Gleichung auch „exakte" Differentialgleichung, wenn die Bedingung erfüllt ist, dass p(x)dx + q(y)dy = dz das vollständige Differential einer Funktion z= z(x,y) ist. In diesem Beispiel ist die Lösung dann da dz = 0 ist, z (x, y) = C

2.1.b) ... n-ter Ordnung

Beispiele:

Differentialgleichung: $y'''' = 4$

Vgl.: $\int 4$ >>> 4x + c

$\int 4x + c$ >>> $\frac{4x^2}{2} + cx + d$ >>> $2x^2 + cx + d$

$\int 2x^2 + cx + d$ >>> $\frac{2x^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx$ 2x³/3 + cx²/2 +dx + e

$\int \frac{2x^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx + e$ >>> $\frac{\frac{2}{3}x^4}{4} + \frac{cx^3}{6} + \frac{dx^2}{2} + ex + f$

$\int \frac{x^4}{6} + \frac{cx^3}{6} + \frac{dx^2}{2} + ex + f$ >>> $\frac{x^5}{30} + \frac{cx^4}{24} + \frac{dx^3}{6} + \frac{ex^2}{2} + fx$

2.2.) Differentialgleichungen mit separierbaren Variablen (partielle Differentialgleichungen)

Diese Differentialgleichungen werden in erster Linie durch Trennung der Variablen und spätere Integration gelöst.

Beispiel:

Allgemeine Form: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

Lösungsweg:

Separation:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \| \cdot dx; \div g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

a.) unbestimmte Integration von $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$

Form der Lösung : $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$

b.) Die Stammfunktionen G(y) = $\int \frac{dy}{g(y)}$ und F(x) = $\int f(x) \cdot dx$ sind bekannt

Form der Lösung: G(y) = F(x) + C

Anmerkungen:

1.) Da es natürlich nicht in jedem Falle möglich ist, die Integration auch tatsächlich durchzuführen, was ein Problem der Integralrechnung ist, bezeichnet man das Problem der Differentialgleichung bereits beendet, wenn man es auf eine Integration zurückgeführt hat.

2.) Auch wenn man die Stammfunktionen der in der Differentialgleichung auftretenden Integrale angeben kann, so kann man die daraus entstehende Gleichung in vielen Fällen noch lange nicht nach y auflösen, d.h. die gesuchte Funktion in der Form y = y(x) schreiben. Man erhält die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung also nur in der Form f(x,y) = C

3.) linear und nicht linear

Eine Differentialgleichung wird als linear bezeichnet, wenn in ihr keine Produkte und Potenzen der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen auftreten.

Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung lautet:

$$y' + p(x)y = r(x)$$

Beispiel:

$$y = y' + 4$$

$$y' + x^2y = e^x$$

Als nicht lineare Differentialgleichung bezeichnet man demnach, Differentialgleichungen in denen Produkte und/ oder Potenzen der gesuchten Funktion auftreten.

Beispiele:

$$y = 20y' \cdot y'''$$

$$y = 20 + y'^3$$

$$y = 5y'' - y'^6$$

3.1) homogene lineare Differentialgleichungen:

Als homogene lineare Differentialgleichungen bezeichnet man eine lineare Differentialgleichung, in der kein von y oder seinen Ableitungen freies Glied (Störglied) auftritt.

Beispiel:

$y' = 3y$

Hat y' noch eine Funktion (z.B.: q (x)) zum Faktor, (Bsp: $q(x) \cdot y' + p(x)y = r(x)$) so muss man die ganze Gleichung durch q(x) teilen. Verschwindet die rechte Seite (r(x)) $r(x) \equiv 0$, so wird aus dieser Gleichung ebenfalls eine homogene lineare Differentialgleichung.

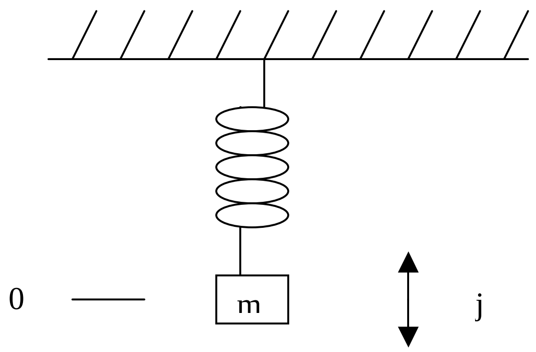
3.2) inhomogene (lineare) Differentialgleichungen

Wenn die rechte Seite (r(x)) **nicht** $r(x) \equiv 0$, dann nennt man die Gleichung *inhomogen.*
r(x) wird darin als Störungsglied bzw. Störungsfunktion bezeichnet.

3.1.a)Die Schwingungsgleichung:

Das wichtigste Beispiel einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die „freie Schwingung“:

Geg.: An einer Schraubenfeder der Federkonstante k hänge eine Masse m. Zieht man die Masse aus ihrer Ruhelage heraus und lässt sie dann frei, so vollführt sie freie Schwingungen. Die Rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung y (Proportionalitätsfaktor k), die auftretenden Reibungskräfte seien proportional zur Geschwindigkeit dy/dt (r Reibungskoeffizient).



Die Kräftebilanz („Masse mal Beschleunigung gleich Summe der wirkenden Kräfte“) liefert dann die Differentialgleichung:

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y - r \cdot \frac{dy}{dt} \text{ somit } >>>>> \underline{m \cdot y'' + r \cdot y' + k \cdot x = 0}$$

Die dazu gehörige charakteristische Gleichung lautet:

$m \cdot \lambda^2 + r \cdot \lambda + k = 0$

Diese Gleichung hat nach der pq Formel folgende Lösungen

$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \frac{1}{2m}$ *

* Quelle: Einführung in die Mathematik für Naturwissenschaftler

4.) Bedingungen:

Jede Differentialgleichung umfasst, wie bereits in 1.1 erwähnt eine Schar von Lösungsfunktionen. Folglich ist die erwünschte Lösungsfunktion durch die Differentialgleichung alleine nicht eindeutig bestimmt. Wenn man also eine eindeutige Lösung haben will, muss man deshalb noch Bedingungen (meist Anfangs- und Randbedingungen) stellen.

4.1) Anfangsbedingungen :

Möchte man die Integralkurve bestimmen, die durch einen vorgeschriebenen Punkt (x0,y0) geht, dann muss man das Cauchy - Problem (ein Anfangswertproblem) lösen. Die Bedingung y(x0) = y0 heißt Anfangsbedingung, der Punkt (x0/y0) heißt Anfangswert. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems wird durch den *Satz von Picard – Lindelöf* gesichert.

4.2) Randbedingungen :

Beispiel:

Differentialgleichung : Y'' = -y

Die Lösungsfunktion hierzu lautet

Y = A*sinx + B*cosx

Probe : 2.Ableitung von y soll gleich negative Funktion y sein !

2.Ableitung: y = A* sinx + B* cosx
y' = A* cosx – B* sinx
y'' = -A*sinx –B* cosx

y'' = -y

-A* sinx – B* cosx = -(A* sinx + B* cosx)
-A* sinx – B* cosx = - A* sinx – B* cosx

>>>>>>> identisch<<<<<<<<<

Somit ist bewiesen, dass A* sinx + B* cosx die Lösungsfunktion für die Differentialgleichung y'' = -y ist. Da diese Funktion aber ein Schar von Lösungsfunktionen darstellt, muss man sie durch eine bzw. mehrere Randbedingungen einschränken.
Randbedingungen für diese Aufgabe könnten z.B. sein:

Y(0) = 2
Y'(0) = 1
Diese setzt man jetzt in die Funktionen y(0) und y'(0) ein

Y(0) >>> 2= A* sin(0) + B* cos(0)
Y'(0) >>> 1= A*cos(0) – B* sin(0)

Da sin(0) = 0 ist, folgt A=1 und B=2.

Die „partikuläre" Lösung (partikulär, da es sich nur um eine der möglichen unendlich vielen Lösungskurven handelt) lautet also unter Berücksichtigung dieser Randbedingungen:
y(x) = sinx + 2 cosx