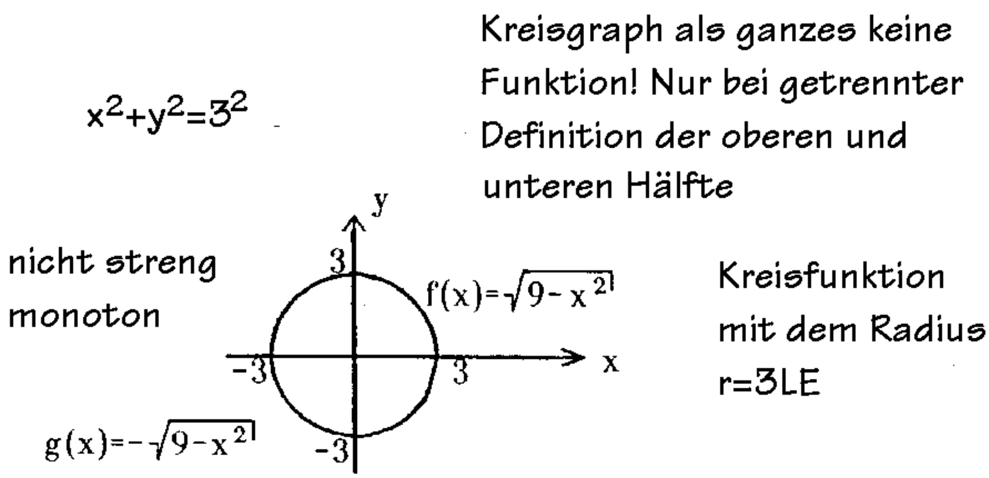
MATHEMATIK VON DEN FUNKTIONEN

MATHEMATIK VON DEN FUNKTIONEN



von

Daniel Kumitz und Herbert Voß

Berlin, im April 1995

In Dankbarkeit zwei *Füchsen* gewidmet:

Mr. **Ronald Fox**,
der mir während meines
High-School-Jahres
in den USA die Augen für
die Faszination
der Mathematik öffnete.

Herrn Dr. **Herbert Voß**,
der mir beibrachte, die
Mathematik anschaulich zu
betrachten, und ohne den
diese Sammlung heute nicht
das wäre, was sie ist.

Daniel Kumitz

Alle Rechte der Veröffentlichung liegen bei den Autoren! Jede Veränderung bedarf unserer ausdrücklichen Zustimmung.

Berlin, 1995

Inhaltsverzeichnis

© Kumitz/Voß

Vorwort

An einem kreativen Oktobernachmittag 1993 geboren, an langen, gemütlichen Winterabenden bis Februar 1994 entstanden, erschien an den Iden des März die erste Version dieser Funktionensammlung. Zunächst für meine Mathematik-Nachhilfeschüler gedacht, nahm sie in jenem Winter tagtäglich an Volumen zu. Jetzt erscheint die nochmals vollständig überarbeitete und ergänzte zweite Fassung, die vor allen Dingen übersichtlicher gestaltet wurde.

Diese Zusammenstellung ist für Schüler der gymnasialen Oberstufe gedacht, hauptsächlich für Grundkursteilnehmer. Aber auch dem Leistungskursschülern kann sie zumindest als Gedächtnisstütze gute Dienste erweisen. Dem Leser soll durch anschauliche Erklärungen ermöglicht werden, die wichtigen mathematischen Funktionen zu verinnerlichen und vor allen Dingen ihre Graphen schnell analysieren und zeichnen zu können. Man muß praktisch nur einige wichtige Prinzipien begreifen, was wir hier durch anschauliche Beschreibungen, wie “Fahrstuhl-” oder “Zimmernummereffekt” zu unterstützen versuchen. Neben solchen, den Einstieg erleichternden, “spielerischen” Betrachtungsweisen wurde natürlich immer auch Wert auf exakte mathematische Beschreibungen gelegt.

Um diese Zusammenstellung als Nachschlagewerk benutzen zu können, wird empfohlen, sie erst als Ganzes durchzulesen. Erst werden grundlegende Begriffe erklärt, bevor die “normalen” Funktionen zu den etwas “schwierigeren” führen. Insbesondere werden die für die Analysis wichtige Nullstellenbestimmung und Graphenverschiebungen und -spiegelungen behandelt. Die eigentliche Analysis und Integration sind nicht Inhalt dieser Sammlung. Trotzdem beziehen sich einige der Beispiele im sechsten Kapitel auf diese Thematik.

Dank gilt noch Cornelia Kunze, die Korrektur las und auch auf die Verständlichkeit achtete.

Berlin, im März 1995
Daniel Kumitz

Getreu der Devise, daß man gemeinsam meistens mehr erreicht als ein einsamer “Einzelkämpfer”, haben wir versucht, diese Sammlung in einer zweiten Fassung zu optimieren. Die wesentliche Arbeit hat Daniel mit seiner ersten Ausgabe vollbracht. Jeder, der schon einmal ein etwas längeres Referat geschrieben hat, weiß, was an Arbeit dahintersteckt.

Diese Sammlung ist auch eine Bestätigung dafür, daß Schüler eben doch gemeinsam mit Lehrern etwas erreichen können, sei es, wie in diesem Fall, auch “nur” Mathematisches. Berührungsängste gab es jedenfalls nicht, “höchstens beim Erstellen der Graphen, wenn es um die Tangenten ging”. Das Ganze dient letztlich **uns**, den Schülern zum besseren Verständnis, den Lehrern als Unterstützung für ihren Unterricht.

Berlin, im März 1995
Herbert Voß

© Kumitz/Voß

1 ALLGEMEINES

Grundlegend für die Mathematik sind die sogenannten Funktionen. Fast alle naturwissenschaftlichen oder gesellschaftspolitischen Vorgänge lassen sich in Funktionen einer oder mehrerer Variablen ausdrücken. Dabei muß das Aufstellen derartiger Funktionen nicht unbedingt einfach sein.

1.1 VARIABLEN UND MENGEN

Eine **Funktion ist eine Menge geordneter Paare** (x;y). Sie ist eine eindeutige Zuordnung, d.h. **jedem** x-Wert wird nur **ein** einziger y-Wert zugeordnet. Jede senkrechte Gerade darf also den Graphen der Zuordnung/Funktion höchstens einmal schneiden. Dabei spielen die Namen der Variablen keine Rolle. Häufig (v.a. in der Physik) wird statt x die Variable t (für die Zeit) verwendet. Grundsätzlich gibt es eine **unabhängige** Variable und eine **abhängige** Variable. Meist ist y als **Funktionswert** die abhängige Variable (sie ist von x abhängig) und x (t,s,etc.) die unabhängige Variable (sie wird willkürlich gewählt). Die unabhängige Variable kommt aus der **Definitionsmenge**[1] D, die abhängige Variable wird der **Wertemenge**[2] W entnommen. Diese enthält alle Abbildungen der unabhängigen Variablen unter f, d.h. D wird abgebildet auf W ($D \to W$). Man kann D und W bestimmten Funktionen zuordnen, z.B. ist D_f die Definitionsmenge von f(x) oder W_h die Wertemenge von h(x).

Die Darstellungsweisen y=3x und f(x)=3x sind grundsätzlich identisch. Beide bezeichnen: $x \mapsto 3 \cdot x$ (jedem x wird sein Dreifaches zugeordnet). Die Darstellungsweise y=... ermöglicht das Rechnen mit beiden Seiten der Gleichung, z.B. bei der Darstellung eines Kreises: $y^2 = r^2 - x^2$. Man beachte, daß es sich nicht um eine Funktion handelt! Lediglich f(x)=... weist immer auf eine Funktion hin, z.B.: $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ (Halbkreisfunktion)[3].

Die Aufgabe der unabhängigen Variablen ist die eines Platzhalters. So wird die Variable durch die Zahl ersetzt, deren Funktionswert wir ermitteln wollen. Suchen wir z.B. von $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ den Funktionswert von (-2), so ersetzen wir alle x durch (-2): $f(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 17$.

1.2 MONOTONIE

Gilt für eine Funktion, daß auf dem Interval I der jeweils rechts von $f(x_1)$ folgende Funktionswert $f(x_2)$ größer oder gleich ist, so ist die Funktion auf dem Intervall I **monoton steigend**: $f(x_1) \le f(x_2)$, wobei $x_1 < x_2$. **Monoton fallend** ist sie dagegen wenn der umgekehrte Fall vorliegt, also jeder Funktionswert rechts von $f(x_1)$ kleiner oder gleich ist: $f(x_2) \le f(x_1)$, mit $x_2 > x_1$.

1 auch Argumentemenge oder Ursachenmenge genannt

2 auch Zielmenge oder Ergebnismenge genannt

3 siehe auch Titelseite

© Kumitz/Voß

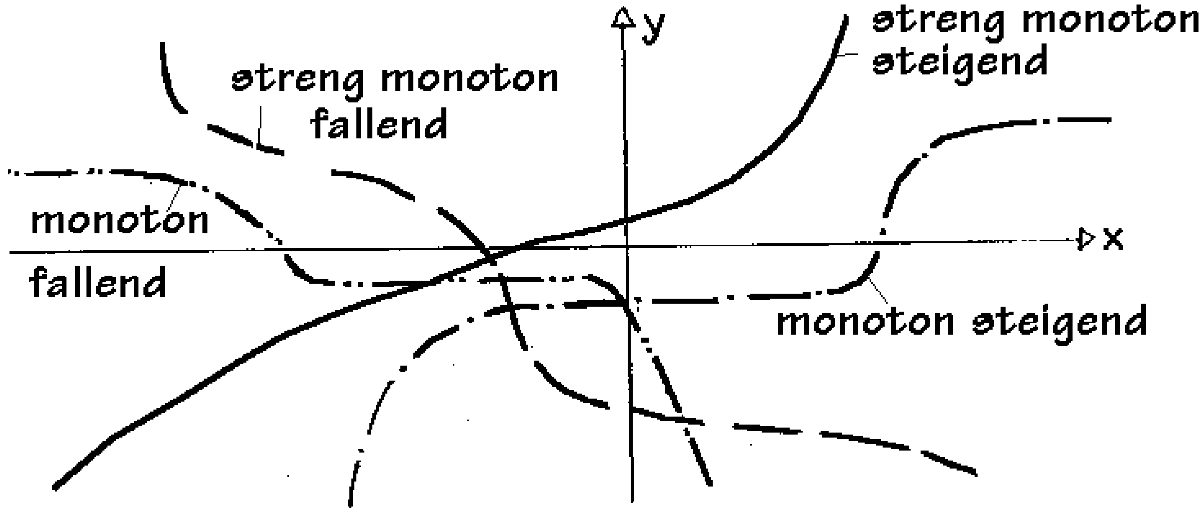


Abbildung 1-1 Beispiele zur Monotonie

Streng monoton steigend ist eine Funktion, wenn gilt $f(x_1) < f(x_2)$, mit $x_1 < x_2$; **streng monoton fallend,** wenn gilt: $f(x_1) > f(x_2)$, mit $x_1 < x_2$. (Hier reicht es also nicht, wenn der Funktionswert gleich bleibt!)

Das Intervall I heißt **Monotonieintervall**. Der entsprechende Teil des Graphen heißt dann **Monotoniebogen**.

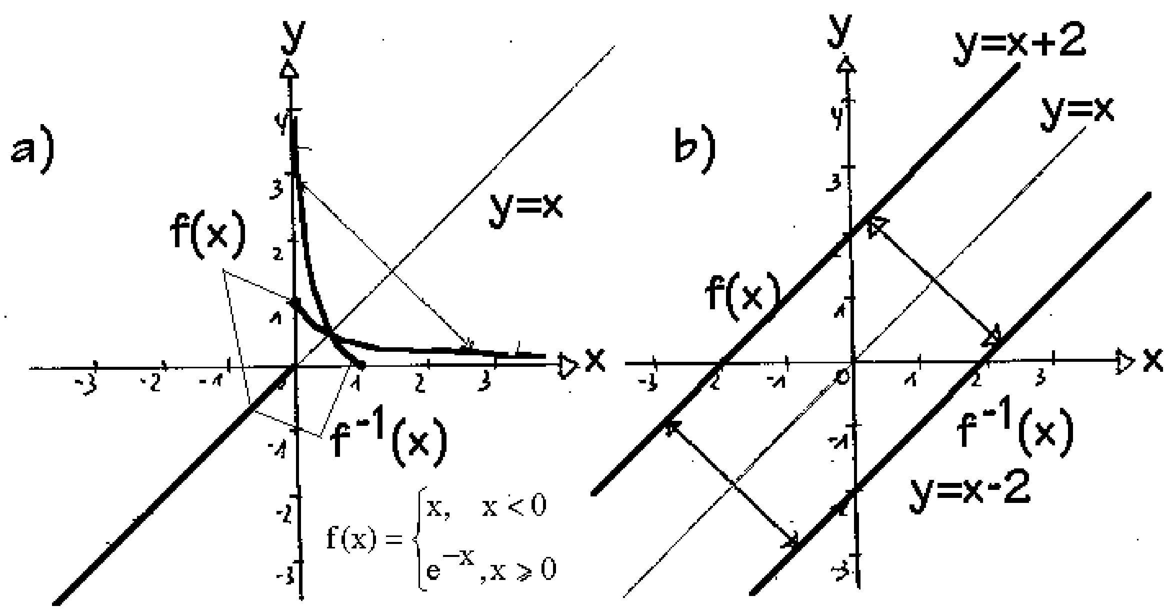


Abbildung 1-2 Beispiele zur Umkehrfunktion

1.3 UMKEHRFUNKTIONEN (INVERSE FUNKTIONEN)

Eine Umkehrfunktion läßt sich nur von einer eindeutig umkehrbaren Funktion bilden, so daß also wieder eine Funktion entsteht. Funktionen sind anschaulich eindeutig umkehrbar, wenn jede waagerechte Linie den Funktionsgraphen höchstens einmal schneidet, also jedem y-Wert nur ein x-Wert zugeordnet wird. Mathematisch ausgedrückt heißt das: eine Funktion ist eindeutig umkehrbar, wenn aus $x_1 \neq x_2$ folgt, daß $f(x_1) \neq f(x_2)$, womit streng monotone Funktion eindeutig umkehrbar sind. Nicht-stetige Funktionen[4] können auch eindeutig umkehrbar sein,

[4] siehe auch 1.4 Stetigkeit.

© Kumitz/Voß

wenn sie nicht streng monoton sind. So ist die Funktion aus Abbildung 1-2a zwar nicht monoton für die gesamte Definitionsmenge, sondern nur auf den Teilintervallen $[-\infty;0]$ (streng monoton steigend) und $[0;+\infty]$ (streng monoton fallend), aber doch eindeutig umkehrbar! Denn jedem y-Wert wird nur ein x-Wert zugeordnet. Dies wurde dadurch möglich, daß f in zwei verschiedenen Gleichungen für beide Intervalle ausgedrückt ist, und dadurch ein “Sprung” des Graphen bei x=0 entsteht:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$ (Intervallweise definierte Funktion)

Derartige Fälle der intervallweisen Definition sind z.B. in naturwissenschaftlichen Prozessen häufig zu finden.

Bildet man die Umkehrfunktion, so werden alle Lösungspaare vertauscht: Aus (x;y) wird (y;x) (siehe Abbildung 1-3). D.h. wurde z.B. vorher der Zahl x=2 der Wert y=4 zugeordnet, so wird jetzt der Zahl y=4 der Wert x=2 zugeordnet. Gewohnheitsmäßig werden dann zusätzlich die Variablennamen mitvertauscht, so daß dann der Zahl x=4 der Wert $y^{-1}=2$ zugeordnet wird. Ebenfalls vertauscht werden Definitions- und Wertemenge: D_f wird zu $W_{f^{-1}}$ und W wird zu $D_{f^{-1}}$.

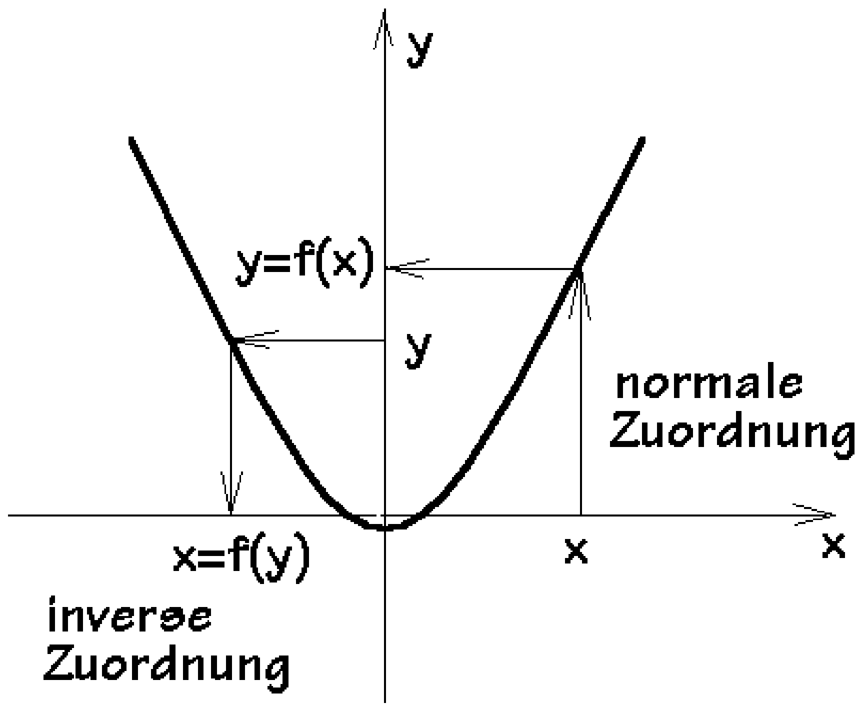


Abbildung 1-3 Umkehrung der Zuordnung $x \mapsto y=f(x)$ durch $f(y)=x \mapsto y$

Die Umkehrfunktion wird ermittelt, indem die Funktionsgleichung nach der unabhängigen Variablen (x) aufgelöst wird, und dann diese mit der abhängigen Variablen (y) vertauscht wird (siehe auch Abbildung 1-2):

$$y = f(x) = x^2$$
$$x = f(y) = \sqrt{y}$$
$$y^{-1} = f(x) = \sqrt{x}$$

Zeichnerisch wurde der Graph an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten, y=x, gespiegelt.[5] Nicht eindeutig umkehrbare Funktionen können aber auch ohne weiteres für **Teil**intervalle, in denen der Funktionsgraph streng monoton verläuft, invertiert werden, z.B. $f(x)=\sin x$ ($I=[0;\pi/2]$) oder $f(x)=x^2$ ($I=[0;+\infty)$).[6]

Es ist manchmal sinnvoll zu wissen, welche Funktionen zueinander invers sind. Die meisten Taschenrechner haben nur eine “**ln**” (logarithmus naturalis)-Taste, aber keine für “**e**”. Da aber die meisten Taschenrechner eine INV-Taste[7] haben, kann man ohne weiteres die Werte für $\mathbf{ln^{-1}x}$, also $\mathbf{e^x}$, ausrechnen! Z.B. ergibt “2-INV-ln” in der Anzeige 7,389, was $\mathbf{e^2}$ entspricht. Das gleiche gilt für $\mathbf{sin^{-1}}$, $\mathbf{cos^{-1}}$, $\mathbf{tan^{-1}}$ und $\mathbf{log^{-1}}$ (eigentlich “**lg**”, d.h. zur Basis 10!).

5 Dabei ist der Einfachheit halber auf gleichen Achsenmaßstab zu achten.

6 Vgl. dazu auch die folgenden Kapitel.

7 manchmal auch als “2nd” bezeichnet.

© Kumitz/Voß

1.4 Stetigkeit

Eine Funktion f(x) ist anschaulich stetig, wenn der Graph ohne Unterbrechungen, wie Lücken[8] oder Sprünge gezeichnet werden kann.

Eine Funktion f(x), deren Definitionsbereich eine Umgebung der Stelle x=c enthält, ist an der Stelle x=c genau dann **stetig**, wenn drei Bedingungen erfüllt sind:
1) Die Funktion ist für x=c definiert, d.h. f(c) existiert;
2) Der Grenzwert existiert: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = g$
3) Es gilt f(c)=g

Gelten die drei Bedingungen für alle $x \in D$, so ist diese Funktion über dem gesamten Definitionsbereich stetig.[9]

Beispiele:

1. Die Funktion $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ *ist an der Stelle x=2 unstetig. Zwar ist* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ *vorhanden, aber f(1) existiert nicht!*[10]

2. Die Gaußklammerfunktion y=f(x)=x[x] (Abbildung 2-12b) ist z.B. an der Stelle x=2 definiert: f(2)=2. Es gilt aber:

$$\lim_{x \to 2+0} [x] = \lim_{h \to +0} [2 + h] = 2$$

$$\lim_{x \to 2-0} [x] = \lim_{h \to +0} [2 - h] = 1 \text{ ,}$$

d.h., $\lim\limits_{x \to 2} [x]$ *ist nicht vorhanden. Die Funktion ist bei x=2 und jedem weiteren ganzzahligen Wert unstetig.*

1.5 Symmetrien

Die Graphen von Funktionen können Symmetrien zu Punkten und vertikalen Geraden aufweisen. Interessant sind vor allem die Graphen von Funktionen, die punktsymmetrisch zum Ursprung (Nullpunkt des Koordinatensystems) oder achsensymmetrisch zur y-Achse (Ordinate) liegen. Für eine ursprungssymmetrische Funktion gilt:

f(x)=-f(-x).

Sie heißt definitionsgemäß **ungerade Funktion**

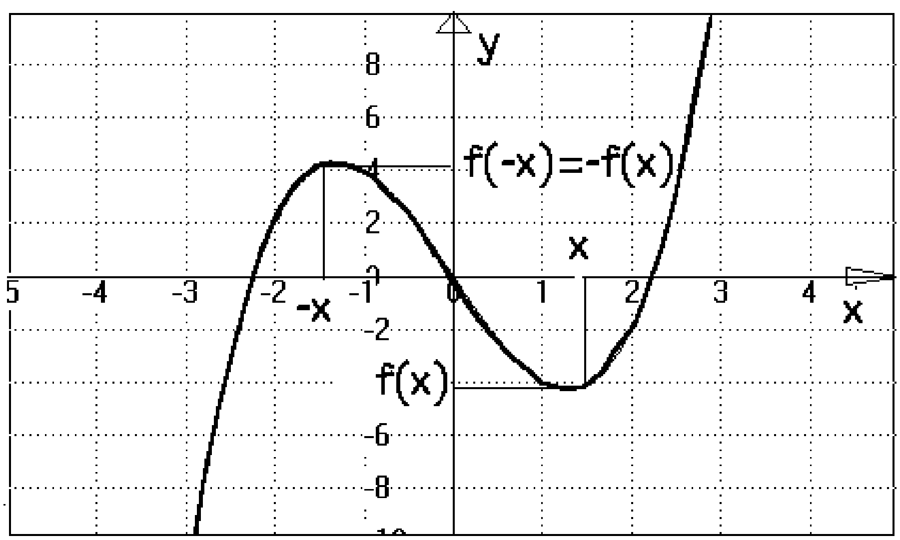


Abbildung 1-4 Symmetrische Funktion

---

[8] "Löcher" im Graphen, weil Definitionslücken häufig durch einen kleinen Kreis im Verlauf des Graphen symbolisiert werden.

[9] Man spricht häufig auch von zweiseitiger Stetigkeit, wenn rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und beide gleich dem Funktionswert sind. Existiert nur ein Grenzwert, so wird dann von einseitiger Stetigkeit gesprochen!

[10] Da der allgemeine Grenzwert existiert, läßt sich die Unstetigkeit durch Festsetzung von f(1)=2 beheben, weshalb man auch von einer **hebbaren Unstetigkeit** spricht (Lücke).

© Kumitz/Voß

(Abbildung 1-4).[11]

Ganzrationale Funktionen, die ausschließlich ungerade Exponenten aufweisen, sind grundsätzlich punktsymmetrisch zum Ursprung, z.B. $f(x) = -3x^5 + x^3 + 2x$.[12]

Für eine y-Achsensymmetrische Funktion gilt: **f(x)=f(-x)**. Sie heißt definitionsgemäß **gerade Funktion** (Abbildung 1-5).

Ganzrationale Funktionen, die ausschließlich gerade Exponenten enthalten, sind grundsätzlich symmetrisch zur y-Achse, z.B.: $f(x) = -3x^6 + x^2 + 2$.[13]

Funktionsgraphen können aber auch zu anderen vertikalen Achsen oder zu anderen Punkten symmetrisch sein (nicht jedoch zu horizontalen Achsen, dann wären es ja keine Funktionen mehr). Wie Abbildung 2-3a zeigt, liegt z.B. die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x + 1}$$

punktsymmetrisch zum Punkt (-1;0).[14]

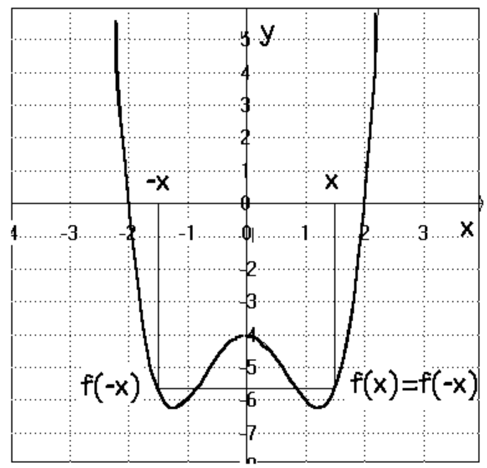


Abbildung 1-5 y–Achsensymmetrische Funktion

[11] Die Bezeichnungen "gerade - ungerade" kommen daher, daß Funktionen mit geradem Exponenten oft gerade Funktionen sind, und Funktionen mit ungeradem Exponenten oft ungerade Funktionen sind (vgl. auch die Kapitel 2.1.1 "Rationale Funktionen" und 2.1.1.1 "Ganzrationale Funktionen (Polynom-Funktionen)").

[12] Hier treten nur die ungeraden Exponenten "5", "3" und "1" auf!

[13] Zu beachten ist, daß vor dem konstanten Glied "2" eigentlich $x^0=1$ steht, so daß auch hier ein gerader Exponent erscheint; denn Null wird als gerade Zahl aufgefaßt.

[14] Siehe auch Abbildung 1-7, wo eine Punktysmmetrie zum Punkt P(2;2) vorliegt.

© Kumitz/Voß

1.6 Asymptoten

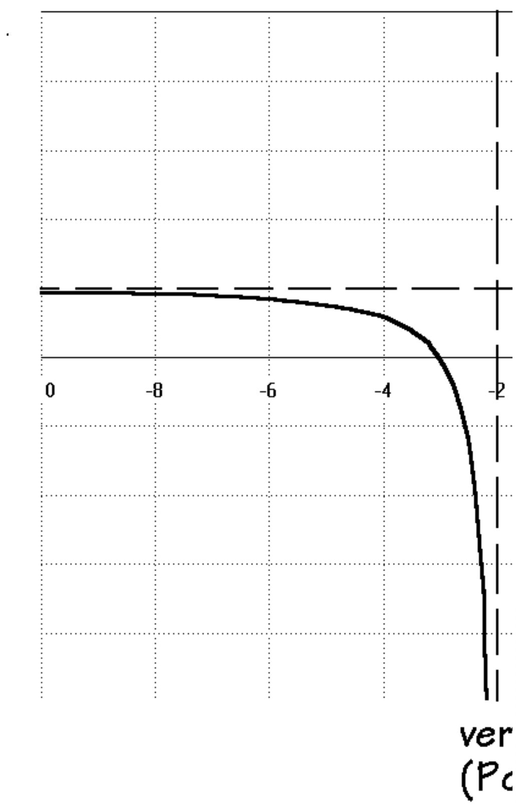


Abbildung 1-6 Funktionssgraph mit vertikaler und horizontaler Asymptote

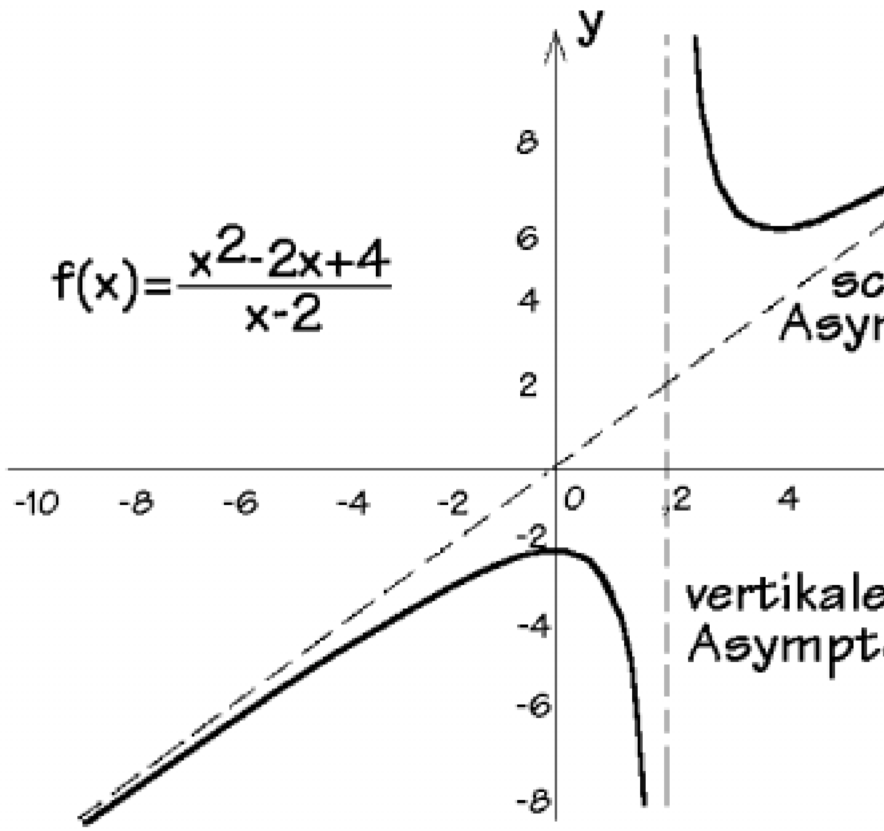


Abbildung 1-7 Funktionsgraph mit vertikaler und schiefer Asymptote

ls Asymptoten bezeichnet man Funktionen, an die sich der Graph einer anderen Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$ annähert. Im folgenden sollen hier nur lineare Asymptoten behandelt werden, d.h. vertikale, horizontale oder schiefe Asymptoten. Nicht jeder Funktionsgraph hat zwangsläufig Asymptoten! Häufig treten sie bei den gebrochenrationalen Funktionen auf, überhaupt bei Verknüpfungen von Funktionen durch Quotientenbildung, z.B. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, mit periodischen, vertikalen Asymptoten (Polstellen) für $\cos(x) = 0$.

1.6.1 Vertikale Asymptoten

Unter vertikalen Asymptoten versteht man senkrechte Geraden. Der Graph nähert sich einer vertikalen Asymptote bei $y \rightarrow \pm\infty$ an, wenn $x \rightarrow x_p$. x_p ist der x-Wert, durch den die Asymptote geht, er heißt **Polstelle**. Vertikale Asymptoten werden mit $x=x_p$ bezeichnet.

Vertikale Asmptoten können von Funktionsgraphen nicht geschnitten werden, da sonst keine eindeutige Zuordnung vorliegt![15]

1.6.2 Horizontale Asymptoten

An horizontale Asymptoten nähert sich der Graph einer Funktion bei $x \rightarrow \pm\infty$ an. Dabei sind die horizontalen Asymptoten für plus und minus Unendlich nicht immer gleich. Eine solche waagerechte Gerade kann vom Funktionsgraphen mehrmals geschnitten werden, bevor der Graph asymptotisch wird und sich der horizontalen Asymptote von oben oder unten annähert. Horizontale Asymptoten werden mit einer konstanten Gleichung ausgedrückt (z.B. y=2).

[15] Einem x-Wert wären dann mehrere y-Werte zugeordnet.

© Kumitz/Voß

1.6.3 Schiefe Asymptoten[16]

Der Funktionsgraph kann sich gegen $x \to \pm\infty$ auch Geraden nähern, die eine “normale” Steigung aufweisen, also

$0<|m|<+\infty$.

Sie werden durch einfache lineare Gleichungen beschrieben, z.B. für Abbildung 1-7 mit $A(x)=y_A=x$ oder $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2} = y_A + \frac{4}{x - 2}$.

2 Funktionstypen

2.1 Algebraische Funktionen

Als algebraisch gilt eine Funktion, die aus einer begrenzten Anzahl von Summen, Differenzen, Multiplikationen, Divisionen und Wurzeln besteht, die die Form x^n enthalten.

16 Auch schräge Asymptote genannt.

© Kumitz/Voß

2.1.1 *RATIONALE FUNKTIONEN*

2.1.1.1 GANZRATIONALE FUNKTIONEN (POLYNOM-FUNKTIONEN)

2.1.1.1.1 ALLGEMEINES

Wie der Name “Polynom-Funktionen” schon sagt, setzen diese Funktionen sich aus vielen unterschiedlichen Gliedern zusammen. Je nach Anzahl der Glieder ist eine solche Funktion ersten Grades, zweiten Grades, dritten Grades usw. Glieder sind zum Beispiel a_1x oder allgemein a_ix^i. Sie werden durch einen Index unterschieden, da das erste Glied ein x in der ersten und das zweite ein x in der i-ten Potenz enthält. Das größte auftretende Gleid heißt häufig a_nx^n.

Koeffizienten sind die Zahlen, die in den einzelnen Gliedern vor der Variablen stehen. Die Funktion $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - x - 107$ hat die Koeffizienten[17] 3, 7, -1 und -107. Da das letzte Glied keine Variable enthält (denn $x^0=1$), wird es auch additive Konstante genannt (da die konstante Zahl 107 subtrahiert wird). Die anderen Koeffizienten sind multiplikative Konstanten (da die Variable mit ihnen multipliziert wird: 3 ist im Beispiel multiplikative Konstante im kubischen Glied). Der Grad einer ganzrationalen Funktion bestimmt sich dabei aus der Anzahl der Glieder, die eine Variable enthalten, bzw. stimmt mit dem größten Exponenten überein.

Achtung: Auch Glieder mit dem Koeffizienten 0 sind Glieder und müssen gezählt werden; z.B. ist $f(x)=x^2$ eine Funktion zweiten Grades, da der größte Exponent “2” ist. Auch die Summe der Glieder mit x ergibt zwei, denn eigentlich steht dort $f(x)=1x^2+0x+0$)

Definitionsmenge und Wertemenge einer jeden Polynom-Funktion sind ℝ. Polynom-Funktionen sind stetig im gesamten Definitionsbereich.

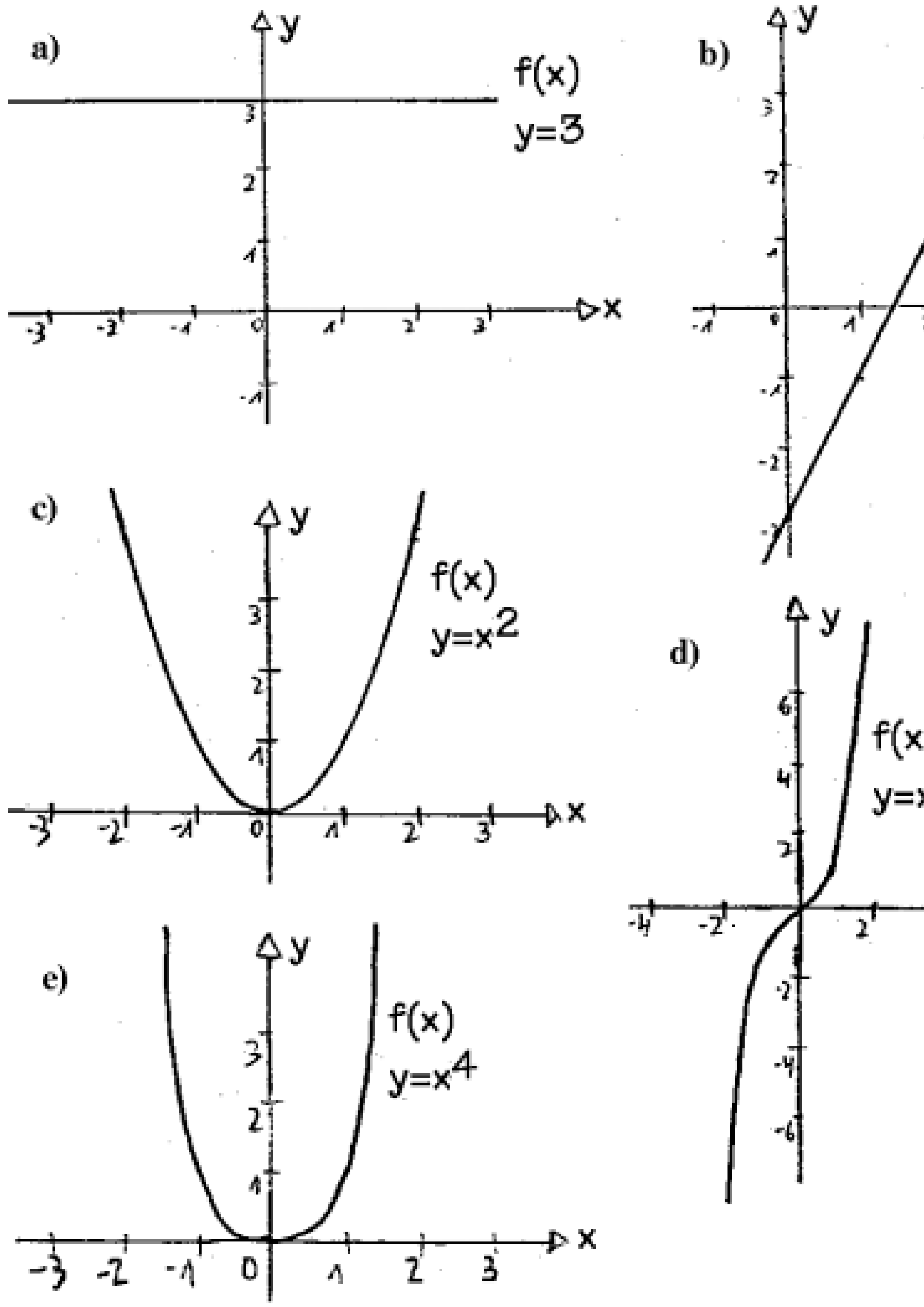


Abbildung 2-1 Graphen verschiedener ganzrationaler Funktionen

Sinngemäß heißen die sortierten Glieder einer Polynom-Funktion:

konstantes Glied	a_0,	lineares Glied	a_1x,	
quadratisches Glied	a_2x^2	kubisches Glied	a_3x^3,	usw.

[17] Erscheint der Koeffizient nicht explizit als Zahlenwert, so ist er immer gleich 1!

© Kumitz/Voß

2.1.1.1.2 Allgemeine Ganzrationale Funktionen

a) Ganzrationale Funktion nullten Grades: $f(x)=k$.
   Es ist eine konstante Funktion, d.h. der Graph ist eine Parallele zur x-Achse. Z.B. $f(x)=3$. Für jeden x-Wert gilt $f(x)=3$, d.h. jedem x-Wert wird der Wert 3 zugeordnet. ($x\rightarrow 3$) (Abbildung 2-1a).

b) Ganzrationale Funktion ersten Grades: $f(x)=mx+n$.
   Es ist eine lineare Funktion (der Graph ist eine Gerade) mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt n (Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse). Z.B. $f(x)=2x-3$ (Abbildung 2-1a b).

c) Ganzrationale Funktion zweiten Grades: $f(x)=ax^2+bx+c$.
   Sie wird auch quadratische Funktion genannt.[18] Ihr Graph ist eine Parabel, z.B. $f(x)=x^2$; die sogenannte Normalparabel (Abbildung 2-1a c).

d) Ganzrationale Funktion dritten Grades (kubische Funktion): $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
   Der Graph wird kubische Parabel genannt, z.B. $f(x)=x^3$ (Abbildung 2-1a d).

e) Die allgemeinen Formen ganzrationaler Funktionen höheren Grades lauten analog:
   vierten Grades[19]: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
   fünften Grades: $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$
   sechsten Grades: $f(x)=ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$
   usw.

Eine beliebige Polynom-Funktion (n-ten Grades):

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_i x^i+\ldots+a_2 x^2+a_1 x+a_0$$

2.1.1.1.3 Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten

Einen Spezialfall bilden die Potenzfunktionen. Potenzfunktionen sind definiert als $\mathbf{f(x)=x^n}$, $\mathbf{n\in N}$. Hier sind bis auf einen alle Koeffizienten gleich Null. Ist n gerade, dann ist auch die Funktion gerade, z. B. $f(x)=x^2$ oder $f(x)=x^4$ (Abbildung 2-1a, c,e). Bei ungeradem n ist auch die Potenzfunktion ungerade, z.B. f(x)= Abbildung 2-1a, d).

Tabelle 1 Eigenschaften der Potenzfunktion $y=x^n$ mit $n>0$

Exponent	Gerade (n=2m)	Ungerade (n=2m+1)
Definitionsbereich	$x\in\Re$	$x\in\Re$
Wertebereich	$y\in[0;\infty)$	$y\in\Re$
Symmetrie	gerade Funktion	ungerade Funktion
Stetigkeit für	$x\in\Re$	$x\in\Re$
Monoton fallend für	$x\in(-\infty;0]$	- - - - - - -
Monoton steigend für	$x\in(0;\infty)$	$x\in\Re$
Gemeinsame Punkte	$P_1(1;1)$ $O(0;0)$ $P_2(-1;1)$	$P_1(1;1)$ $O(0;0)$ $P_3(-1;-1)$

2.1.1.1.4 Verhalten der Polynomfunktionen im Unendlichen

Für alle Polynom-Funktionen gilt: wenn $x\rightarrow\pm\infty$ geht, dann geht $f(x)\rightarrow\pm\infty$. Trotzdem kann man einer Polynom-Funktion ansehen, wann ihr Graph nach $+\infty$ und wann nach $-\infty$ verläuft. Entscheidend ist der Koeffizient im größten Glied, also a_n:

Tabelle 2 Eigenschaften der Polynomfunktionen

[18] Die sogenannte Normalform $0=x^2+px+q$ tritt nur bei der Nullstellenbestimmung auf, da hier ohne weiteres eine Division durch den ersten Koeffizienten "a" erfolgen kann, d.h. $p=b/a$ und $q=c/a$!

[19] Abbildung 2-1a e

© Kumitz/Voß

Grad der Funktion	a_n	Verhalten des Graphen
geradzahlig	a>0	geht auf beiden Seiten nach $+\infty$.
	a<0	geht auf beiden Seiten nach $-\infty$
ungeradzahlig	a<0	geht links nach $+\infty$ und rechts nach $-\infty$
	a>0	geht links nach $-\infty$ und rechts nach $+\infty$

2.1.1.2 Gebrochenrationale Funktionen

2.1.1.2.1 Allgemeine gebrochenrationale Funktionen

Bei einer gebrochenrationalen Funktion wird eine Polynom-Funktion Z(x) durch eine andere Polynom-Funktion N(x) dividiert[20]:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gebrochenrationale Funktionen sind überall dort definiert, wo $N(x) \neq 0$ (anderfalls liegt die unerlaubte Division durch Null vor!). Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$, vermindert um die Nullstellen der Nennerfunktion N(x). Innerhalb der Definitionsmenge sind gebrochenrationale Funktionen stetig.

Gebrochenrationale Funktionen sind an den Stellen N(x)=0 nicht definiert!

Wir unterscheiden drei Fälle:

a) Z(x)=0, aber $N(x) \neq 0$. Hier liegt eine Nullstelle der Funktion f(x) vor. Die Nullstellen der Zählerfunktion Z(x) sind die Nullstellen der Funktion f(x).[21]

b) $Z(x) \neq 0$, aber N(x)=0. Hier liegen Polstellen vor, d.h. der Graph wandert an beiden Seiten der Polstelle nach plus oder minus Unendlich (dies ist leicht erklärbar, denn je kleiner der Nenner wird, desto größer wird der Bruch). Die betreffenden x-Werte werden mit x_p bezeichnet. Die senkrechten Geraden, die durch x_{p1}, x_{p2}, ... gehen, sind vertikale Asymptoten (vgl. Abbildung 1-6). Für die Bestimmung der Polstellen reicht also die Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms.

c) Z(x)=0 **und** N(x)=0. Hier tritt ein "Loch" (bzw. eine Lücke) im Graphen von f(x) auf, z.B. bei der Funktion $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+2}$. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ läßt sich diese Funktion auf (x+2) kürzen. Für x=-2 erhält man die Division von Null durch Null! x+2 ist aber eindeutig eine lineare Funktion. So zeichnet man denn auch diese Gerade und läßt an der Stelle x=2 ein Loch im Graphen, da dieser Funktionswert nicht definiert ist. Hier spricht man von einer hebbaren Definitionslücke[22] (siehe Abbildung 2-12). Entsprechend ist auch der Grenzwert für x=2 existent, der Graph nähert sich von beiden Seiten an y=0 an: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)^2}{x+2} = 0$. Da der Funktionswert f(2) nicht definiert ist, ist die Funktion bei x=2 nicht stetig.

---

[20] Z(x): Zählerpolynom; N(x): Nennerpolynom

[21] Man beachte unbedingt, daß die Nennerfunktion an diesen Stellen ungleich Null ist.

[22] "Hebbar", weil durch Polynomdivision die Lücke geschlossen werden kann!

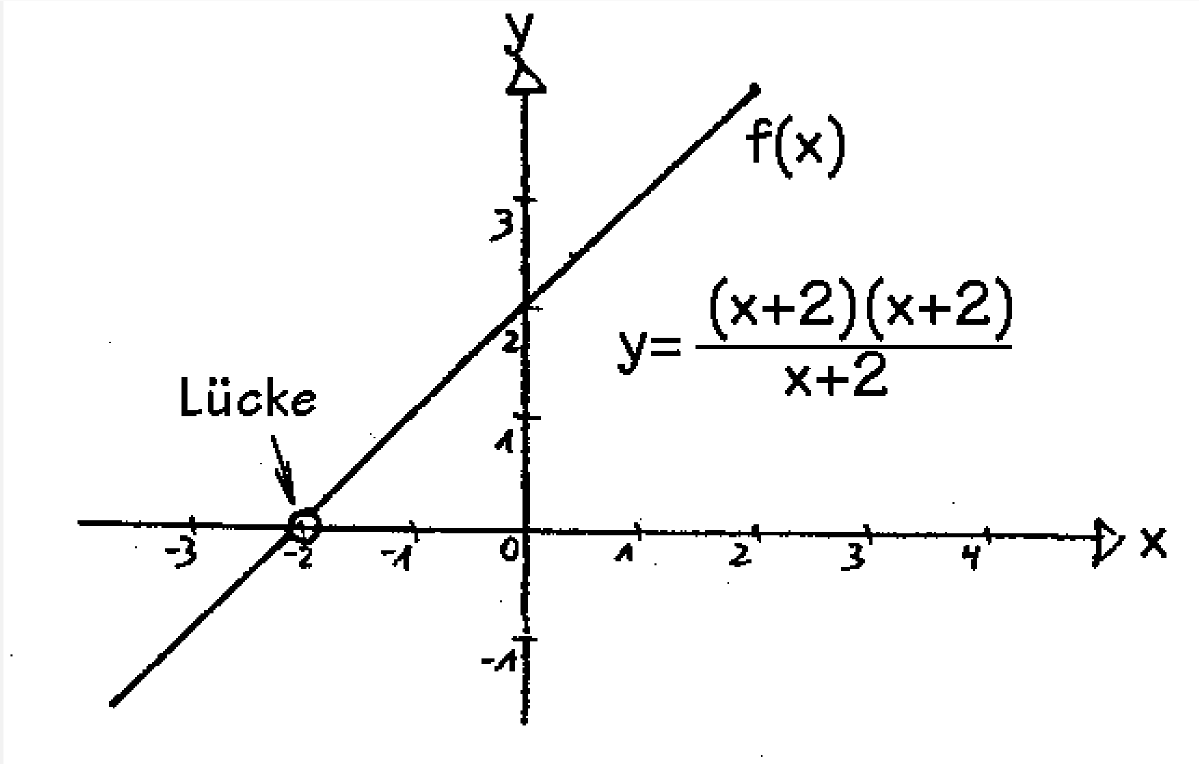


Abbildung 2-2 Funktion mit hebbarer Lücke

Man unterscheidet die gebrochenrationalen Funktionen in **echt** und **unecht** gebrochene. Ist der größte Exponent von Z(x) gleich m und der größte Exponent von N(x) gleich n, dann gilt:

a) echt gebrochen ist eine gebrochenrationale Funktion, wenn **m<n**, z.B. $f(x)=\frac{x+4}{x^2+16x+11}$. Für diese Fälle ist keine sinnvolle Polynomdivision mehr möglich.[23]

b) unecht gebrochen, wenn **m≥n**, z.B. $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$. Bei den unecht gebrochenen Funktionen lassen sich ganzzahlig Vielfache herausdividieren (durch Polynomdivision mit Rest): $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}=x+2+\frac{1}{x-2}$.[24]

Die horizontalen Asymptoten der gebrochenrationalen Funktionen ergeben sich wie folgt:

a) **m<n:** die gebrochenrationale Funktion ist echt gebrochen. Der Graph nähert sich der Gerade y=0 (x-Achse) an für $x\to\pm\infty$.

b) **m=n:** Entscheidend sind die Koeffizienten im größten Glied von Z(x) und N(x): ist a_m der Koeffizient im Glied $a_m x^m$ (der Funktion Z(x)) und b_n der Koeffizient im Glied $b_n x^n$ (der Funktion N(x)), so nähert sich der Graph der horizontalen Asymptote $y=\frac{a}{b}$ an, z.B. $f(x)=\frac{2x^2-18}{x^2-4}$. Diese Funktion hat zwei vertikale Asymptoten bei $x_{p1/p2}=\pm 2$. Die horizontale Asymptote ist y=2, da $\frac{2x^2}{x^2}=2$ (Abbildung 1-5).

c) **m>n**: Für die Funktionswerte des Graphen gilt $y\to\pm\infty$, wenn $x\to\pm\infty$. Durch Polynomdivision läßt sich der ganzzahlige Anteil der Funktion herausdividieren, so daß eine genauere Aussage über das Verhalten möglich

---

[23] Im Bereich der rationalen Zahlen ohne Variablen ist dies vergleichbar mit $\frac{3}{8}$.

[24] Vergleichbar mit $\frac{8}{8}=1$ bzw. $\frac{13}{8}=1+\frac{5}{8}$.

© Kumitz/Voß

ist. Dieser ganzzahlige Anteil entspricht der Asymptote, der sich der Graph für $x \to \pm\infty$ annähert; denn der echt gebrochene Rest geht dann gegen Null, z.B. $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x} = x^2 - \frac{2}{x}$. Diese Funktion nähert sich also für $x \to \pm\infty$ der Normalparabel $y=x^2$ an, während der Ausdruck $\frac{2}{x}$ gegen Null strebt. Für m=n+1 hat der Graph eine schiefe Asymptote: die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x + 2}$ hat die Asymptote y=x, da nach dem Herausziehen des ganzzahlig Vielfachen die Funktionsgleichung wie folgt lautet:[25] $f(x) = x - \frac{4}{x + 2}$

2.1.1.2.2 Hyperbeln oder Potenzfunktionen mit ganzzahligem negativen Exponenten

Besonders häufig sind gebrochenrationale Funktionen mit Z(x)=k (z.B. k=1) und N(x)=ax+b: $f(x) = \frac{k}{ax + b}$. Sie haben genau eine Polstelle bei $x_p = -\frac{b}{a}$, die sich aus N(x)=0 ergibt.[26]

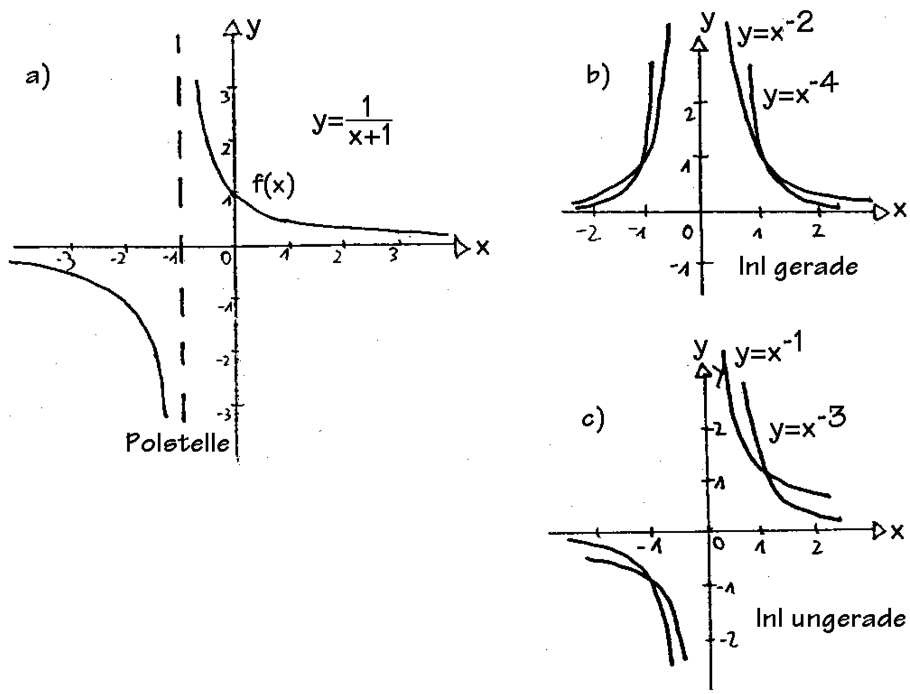


Abbildung 2-3 Hyperbelfunktionen

[25] Siehe Abbildung 1-7.
[26] Siehe Abbildung 2-3a

© Kumitz/Voß

Tabelle 3 Eigenschaften der Potenzfunktion $y=x^n$ mit $n<0$ (Hyperbeln)

Exponent	**Gerade (n=2m)**	**Ungerade (n=2m+1)**
Definitionsbereich	$x\in\Re\setminus\{0\}$	$x\in\Re\setminus\{0\}$
Wertebereich	$y\in(0;\infty)$	$y\in\Re\setminus\{0\}$
Symmetrie	gerade Funktion	ungerade Funktion
Stetigkeit	unstetig bei x=0	unstetig bei x=0
Monoton fallend für	$x\in(0;\infty)$	$x\in\Re\setminus\{0\}$
Monoton steigend für	$x\in(-\infty;0)$	- - - - - -
Gemeinsame Punkte	$P_2(-1;1)$ $P_1(1;1)$	$P_1(1;1)$ $P_3(-1;-1)$
Asymptoten	x-Achse y-Achse	x-Achse y-Achse

Beispiel: $f(x)=\frac{1}{x^{-1}}$ *Diese Funktion stellt graphisch eine Hyperbel dar, die allgemein als $f(x)=1/(x^n)$ mit $n\in N$ definiert sind.*

1/x ist eine Hyperbel ersten Grades, $1/x^2$ eine Hyperbel zweiten Grades usw. Ist n gerade, so ist auch die Hyperbel gerade, anderenfalls ungerade (Abbildung 2-3b-c).

2.1.2 Irrationale Funktionen

2.1.2.1 Wurzelfunktionen

2.1.2.1.1 Quadratwurzelfunktionen

Quadratwurzelfunktionen sind allgemein definiert als $f(x)=\sqrt[2]{x^n}$ bzw. $f(x)=x^{\frac{n}{2}}$. Wir betrachten zuerst den einfachen Fall n=1. Dann wird jedem x diejenige **positive** Zahl zugeordnet, die mit sich selbst multipliziert x ergibt. So wird z.B. dem Wert x=4 der Wert y=|2| zugeordnet. In der Praxis ergibt sich dann nach Auflösen der Betragsstriche die doppelte Lösung $y=\pm 2$. Dieses Problem zeigt sich auch, wenn wir die Quadratwurzelfunktionen als Umkehrfunktionen der quadratischen Funktionen bilden:

$f(x)=\sqrt[2]{x}$ ist die Umkehrfunktion zu $g(x)=x^2$ mit $x\in\Re$.

$h(x)=\sqrt[2]{x-c}+b$ mit $(x-c)>0$ ist die Umkehrfunktion zu $k(x)=(x-b)^2+c$.

g(x) und k(x) sind quadratische Funktionen und stellen im Koordinatensystem Parabeln dar. Diese Parabeln sind weder streng monoton fallend noch steigend, demzufolge auch nicht eindeutig umkehrbar (jedem y-Wert wird nicht nur ein x-Wert zugeordnet). So nimmt g(x) z.B. als y-Wert 4 für x=-2 oder x=+2 an (s.o.). Die Umkehrung darf jedoch nicht zweideutig sein, wenn es sich um eine Funktion handeln soll. Deshalb werden Quadratwurzelfunktionen meist als positiver Teilast definiert, d.h. bei der Normalquadratwurzel ($f(x)=\sqrt{x}$) werden den x-Werten nur die positiven Lösungen (s.o.) zugeordnet. In anderen Worten: die zu invertierende quadratische Funktion $g(x)=x^2$ wurde nur für den streng monoton wachsenden Teilbereich $[0;+\infty)$ definiert (Abbildung 2-4).

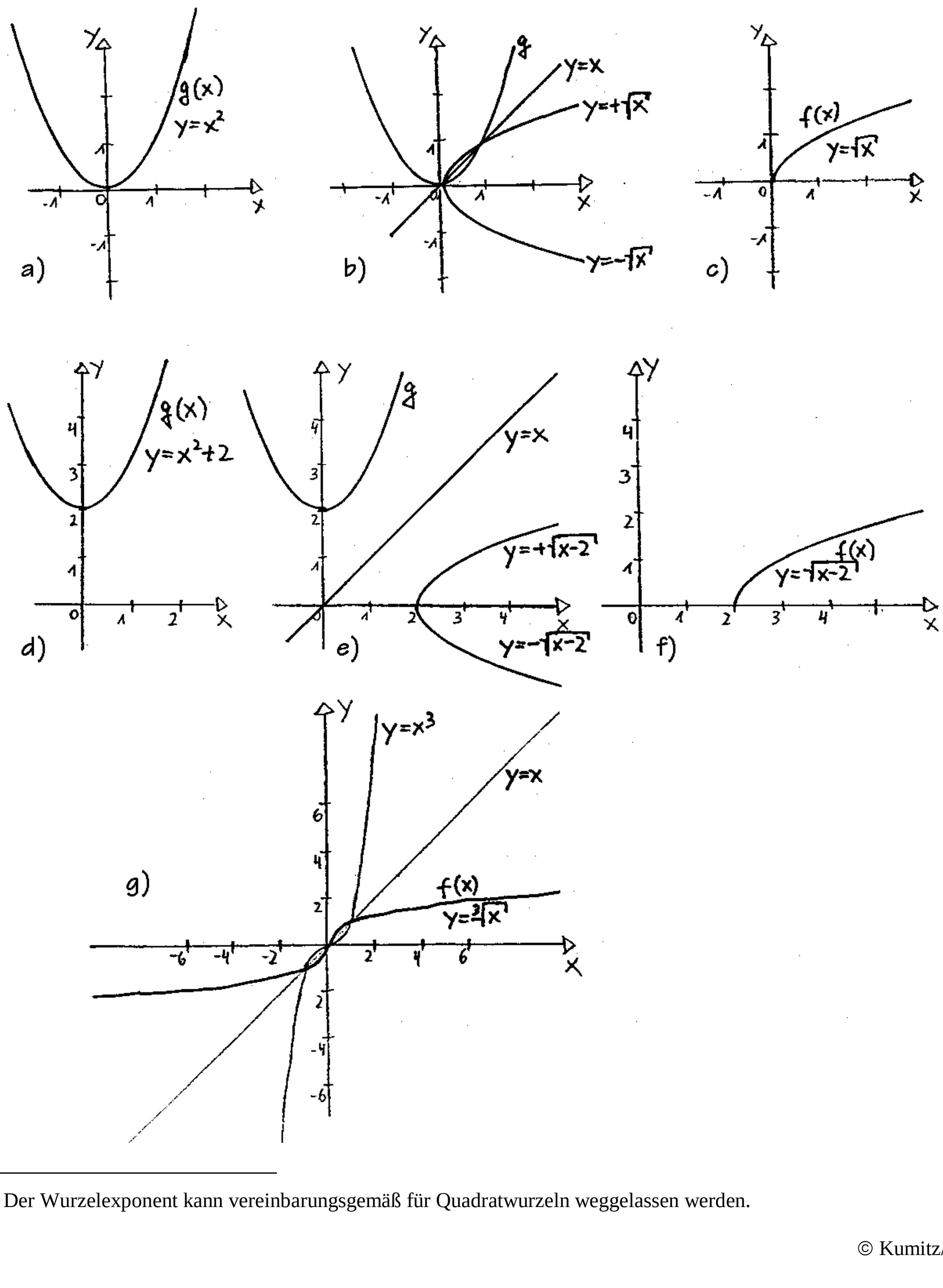
Bei einer anderen Quadratwurzelfunktion k(x) wird der Teilast, der oberhalb des Scheitelpunktes ist, als Definitionsmenge festgelegt. Anders ausgedrückt: es wird wieder nur das streng monoton wachsende Intervall als D_k definiert.

Beispiel:

© Kumitz/Voß

Die Funktion[27] $g(x) = \sqrt{x-2}$ *ist die Umkehrfunktion zu f(x)=*x^2*+2. f(x) ist eine Parabel. Wir definieren das Monotonieintervall [2;+∞), das dann die Wertemenge von g(x) bildet. g(x) ist für alle x* $\in \mathbb{R}$ *mit x* ≥ 2 *definiert und stetig (s.u.), und zwar für die jeweils positive Lösung der Wurzel, also der Teilast, der von [2;0) (dem Scheitelpunkt) aus nach oben wandert und durch die Punkte (3;1), (6;2) usw. geht (Abbildung 2-4d-f).*

Quadratwurzelfunktionen sind nur für positive Radikanden definiert, d.h. die Definitionsmenge muß so gewählt werden, daß der Radikand ≥ 0 ist, denn jede reelle Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert wieder eine positive Zahl. Im Definitionsbereich sind Quadratwurzelfunktionen stetig.



---

[27] Der Wurzelexponent kann vereinbarungsgemäß für Quadratwurzeln weggelassen werden.

© Kumitz/Voß

Abbildung 2-4 Potenz- und Wurzelfunktionen

2.1.2.1.2 KUBIKWURZELFUNKTIONEN

Kubikwurzelfunktionen sind definiert als $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Sie sind für **ganz** $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Denn die Kubikwurzel ist im Gegensatz zur Quadratwurzel für positive und negative Werte definiert: $2^3=8$ und $(-2)^3=-8$ (Abbildung 2-4g).

2.2 TRANSZENDENTE FUNKTIONEN

Transzendent sind alle Funktionen, die sich nicht durch algebraische Gleichungen ausdrücken lassen.

2.2.1 WINKEL-, KREIS,- ODER TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

Dies sind die Funktionen sin x, cos x, tan x, cot x (Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens)[28] (Abbildung 2-7). Diese Funktionen[29] beruhen alle auf dem rechtwinkligen Dreieck. Dort gibt es drei Winkel (α, β, γ), die Hypotenuse c (die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite des Dreiecks) und die zwei Katheten a und b. Letztere werden noch einmal unterteilt in Ankathete (die dem Winkel α anliegende Kathete) und die Gegenkathete (die dem Winkel gegenüberliegende Kathete) (Abbildung 2-5).

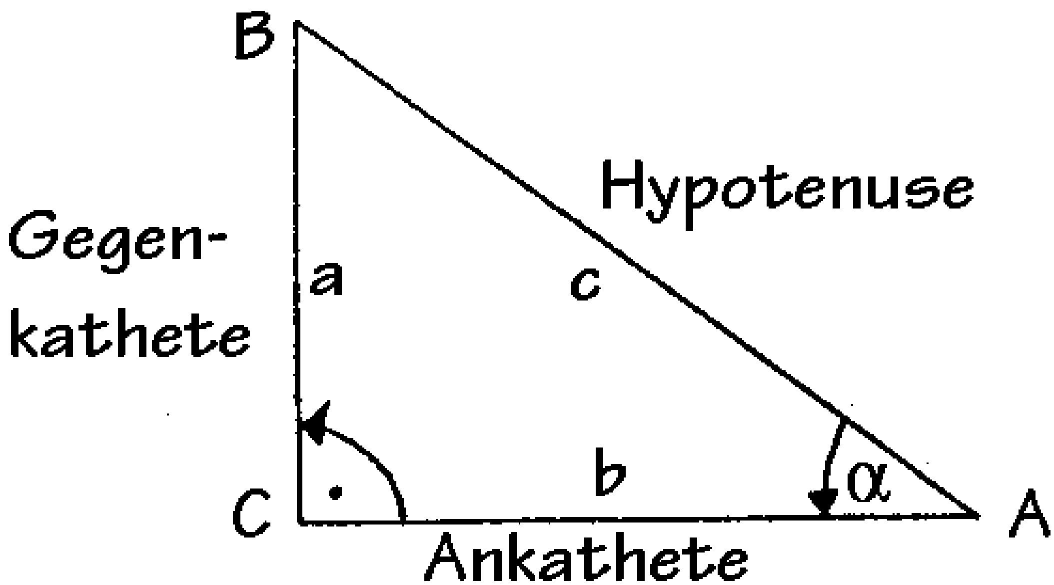


Abbildung 2-5 Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \left(\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \left(\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad \left(\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}\right)$$

[28] Die Funktionen Sekans (reziproker Kosinus) und Kosekans (reziproker Sinus) haben in der Mathematik keine große Bedeutung!

[29] Hierbei wird der Kotangens nur selten benutzt.

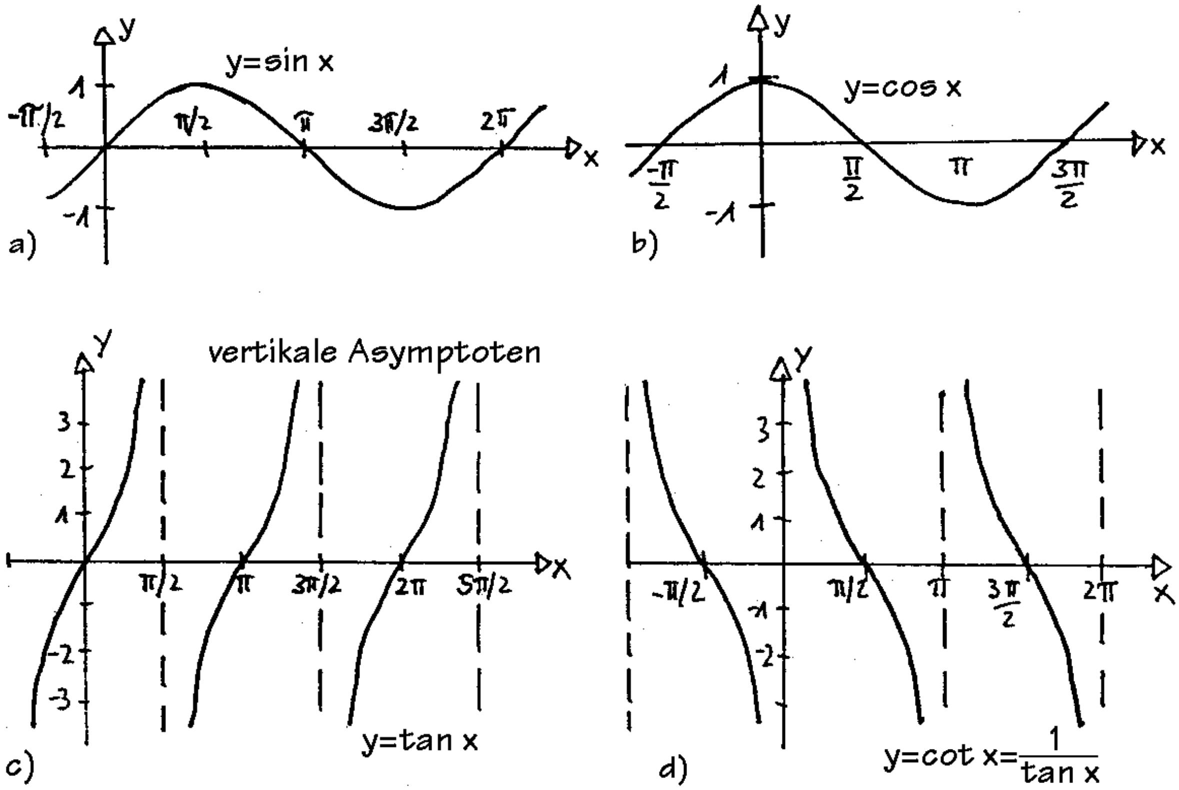
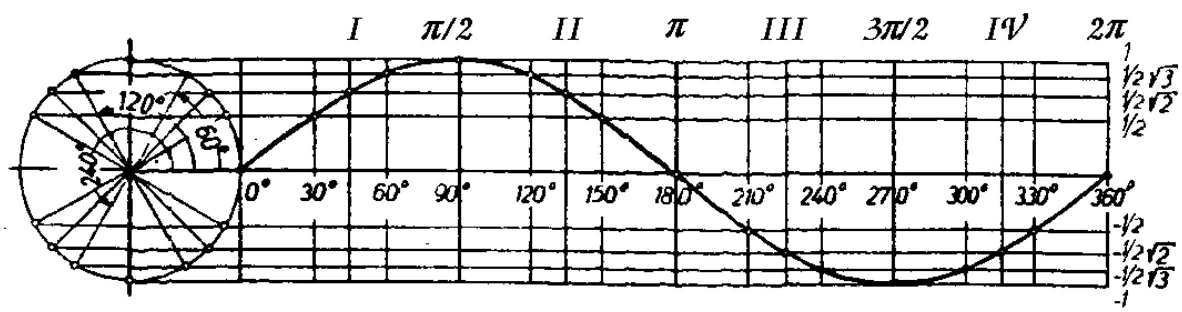
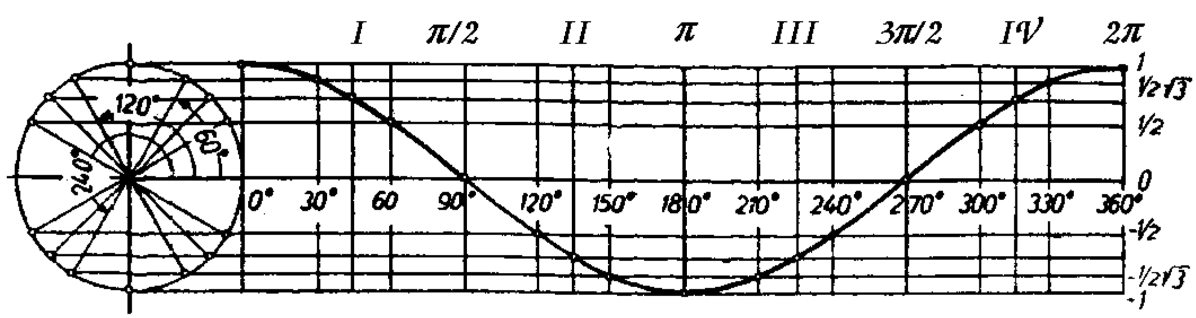


Abbildung 2-6 Allgemeine Darstellung der trigonometrische Funktionen

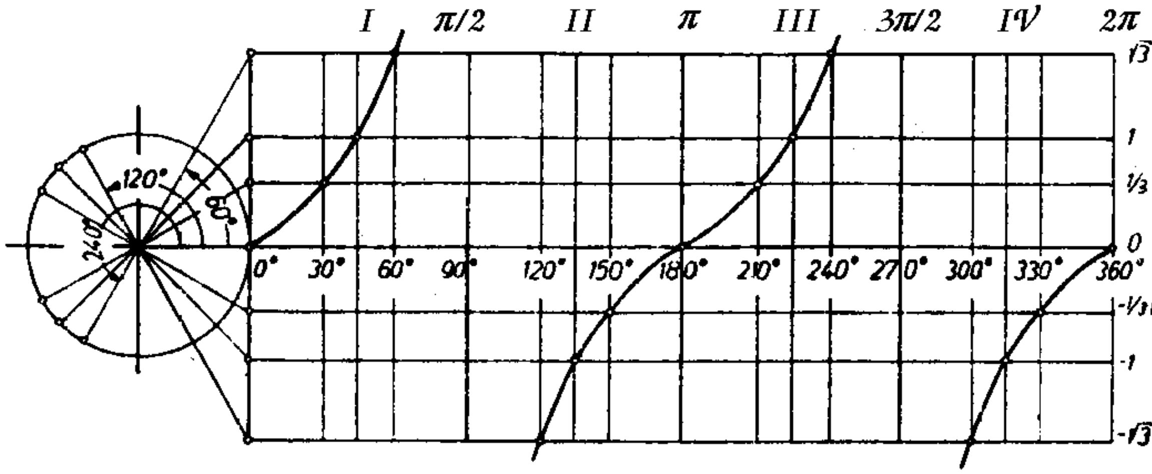
a)



b)



c)



d)

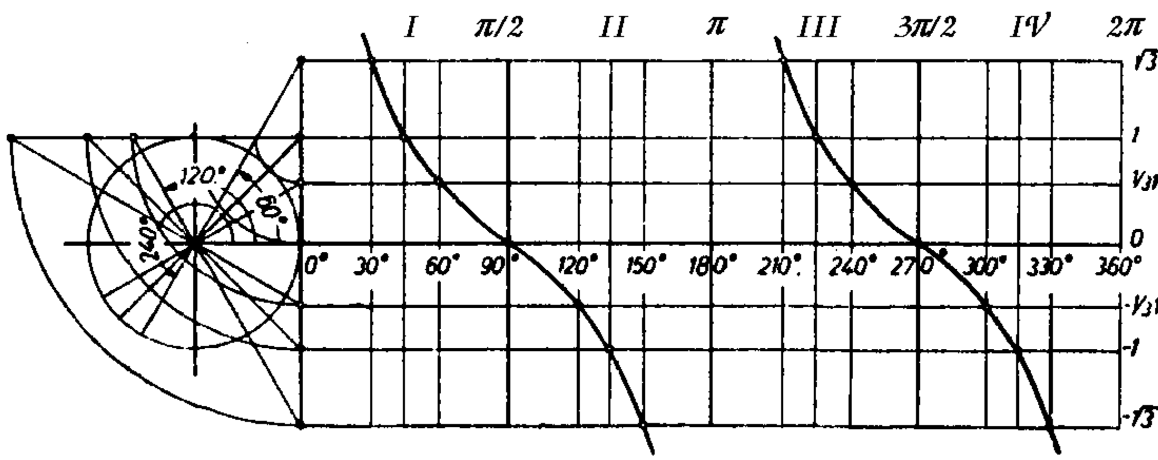


Abbildung 2-7 Trigonometrische Funktionen im Einheitskreis
a) Sinus; b) Cosinus; c) Tangens; d) Kotangens

Zeichnet man diese Funktionen vom Einheitskreis[30] ausgehend, wodurch beliebige Winkelgrößen möglich werden, so erhält man einen periodischen Verlauf (vgl. Abbildung 2-7 bzw Abbildung 2-6): Sinus und Kosinus sind für 2π (bzw. 360°), Tangens ist für π (bzw. 180°) periodisch. Das bedeutet mathematisch ausgedrückt:

$\sin(x+2k\pi)=\sin x$,	$k\in Z$
$\cos(x+2k\pi)=\cos x$,	$k\in Z$
$\tan(x+k\pi)=\tan x$, $k\in Z$	

Gewöhnlich wird der Winkel im Bogenmaß, also in Einheiten von π, gerechnet, so daß statt des Winkels α die Variable x verwendet wird, und die trigonometrischen Funktionen auch für Bereiche außerhalb des rechtwinkligen Dreiecks benutzt werden können, wo sie ja auch auftreten (elektrischer Strom, Wirtschaftswachstum, sonstige Zyklen). Definitionsmenge von Sinus und Kosinus ist $\mathbb{R}$. Die Wertemenge ist W={y|-1<y<+1}. Definitionsmenge vom Tangens ist $\mathbb{R}\backslash\{\pm\pi/2+2k\pi\}$ $k\in Z$, d.h. ohne die Lösungswerte für cos x=0. Wertemenge ist $\mathbb{R}$.

Einige Sinus- und Cosinus-Werte lassen sich relativ einfach merken, da eine einfache Systematik zugrundeliegt, wenn die Wurzelschreibweise gewählt wird:

[30] Die Hypotenuse bzw. der Radius des Kreises ist gleich der Länge Eins.

© Kumitz/Voß

Tabelle 4 Zusammenstellung bestimmter Winkelwerte

x	sin(x)	cos(x)
0°	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
30° $\hat{=}$ π/6	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45° $\hat{=}$ π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
60° $\hat{=}$ π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$
90° $\hat{=}$ π/2	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$

Ebenso einfach kann man sich die Beziehungen zwischen den einzelnen trigonometrischen Funktionen herleiten:

Tabelle 5 Umrechnung zwischen den einzelnen trigonometrischen Funktionen

gegeben ⇨ gesucht ⇩	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
$\sin(\alpha)$ =	$\sin(\alpha)$	$\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	$\frac{\tan(\alpha)}{\pm\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}$
$\cos(\alpha)$ =	$\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$	$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\frac{\cot(\alpha)}{\pm\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}$
$\tan(\alpha)$ =	$\frac{\sin(\alpha)}{\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\cot(\alpha)}$
$\cot(\alpha)$ =	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)}$	$\frac{\cos(\alpha)}{\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\tan(\alpha)}$	$\cot(\alpha)$

2.2.2 ARCUS-FUNKTIONEN[31]

Dies sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen: arcsin x, arccos x usw. Und zwar wird einem Seitenverhältnis ein Winkel zugeordnet (bei den Winkelfunktionen war es genau umgekehrt!). Da die trigonometrischen Funktionen periodisch sind, sind sie nicht eindeutig umkehrbar. Deshalb werden die Umkehrfunktionen auch nur für einen streng monotonen Teilbereich der Kreisfunktionen definiert. Der ist für sin x und tan x: $I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, für cos x und cot x: I=[0;π] (Abbildung 2-8).

---

[31] Auch zyklometrische oder invers-trigonometrische Funktionen genannt.

© Kumitz/Voß

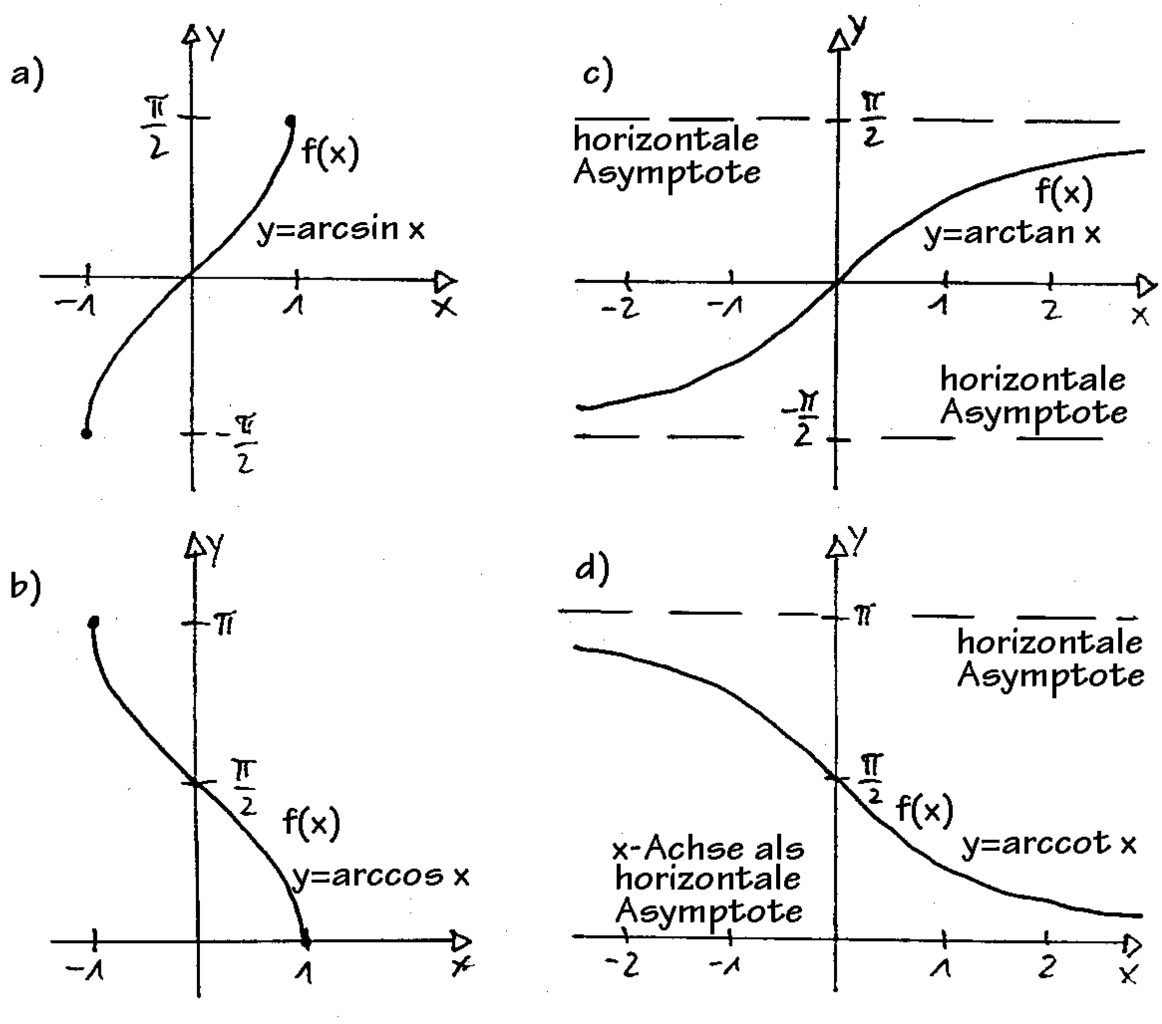


Abbildung 2-8 Die trigonometrischen Umkehrfunktionen

Die Definitionsmengen für die einzelnen Funktionen lauten:
arcsin x und arccos x: D={x|-1<x<1};
arctan x und arccot x: D={x|-◎<x<+◎}=🕐.

Für die Wertemengen gilt:
arcsin x und arctan x: W={y|-□/2<y<□/2};
arccos x und arccot x: W={y|0<y<□}.

Werden Lösungen für diese Funktionen angegeben, so werden die aus der Wertemenge berücksichtigt, also für arcsin 1=□/2, aber für arcsin(-1)=-□/2 und **nicht** der Wert 3/2□, da er außerhalb der Wertemenge liegt. Den richtigen Wert liefert auch der Taschenrechner, indem man das Seitenverhältnis, hier also “-1” eintippt und INV-SIN drückt. Je nach Stellung der DRG-Taste erscheint nun -90° (Stellung auf DEG[32]) oder -1,570797...❻-□/2 (Stellung auf RAD[33]).

Für die trigonometrischen Funktionen gelten folgende Symmetrieeigenschaften:
a) sin x=sin(□-x)
cos x=cos(2□-x)
b) sin x ist ursprungssymmetrisch: sin(-x)=-sin(x)
cos x ist y-Achsensymmetrisch: cos(-x)=cos(x).

[32] DEG ist die Abkürzung für degree (Grad) im Gegensatz zur Anzeige GRAD, die für Neugrad steht (0°..100°), was häufig zu Verwechselungen führt!

[33] RAD ist die Abkürzung für Radiant (Bogenmaß) bzw. radian (engl.).

© Kumitz/Voß

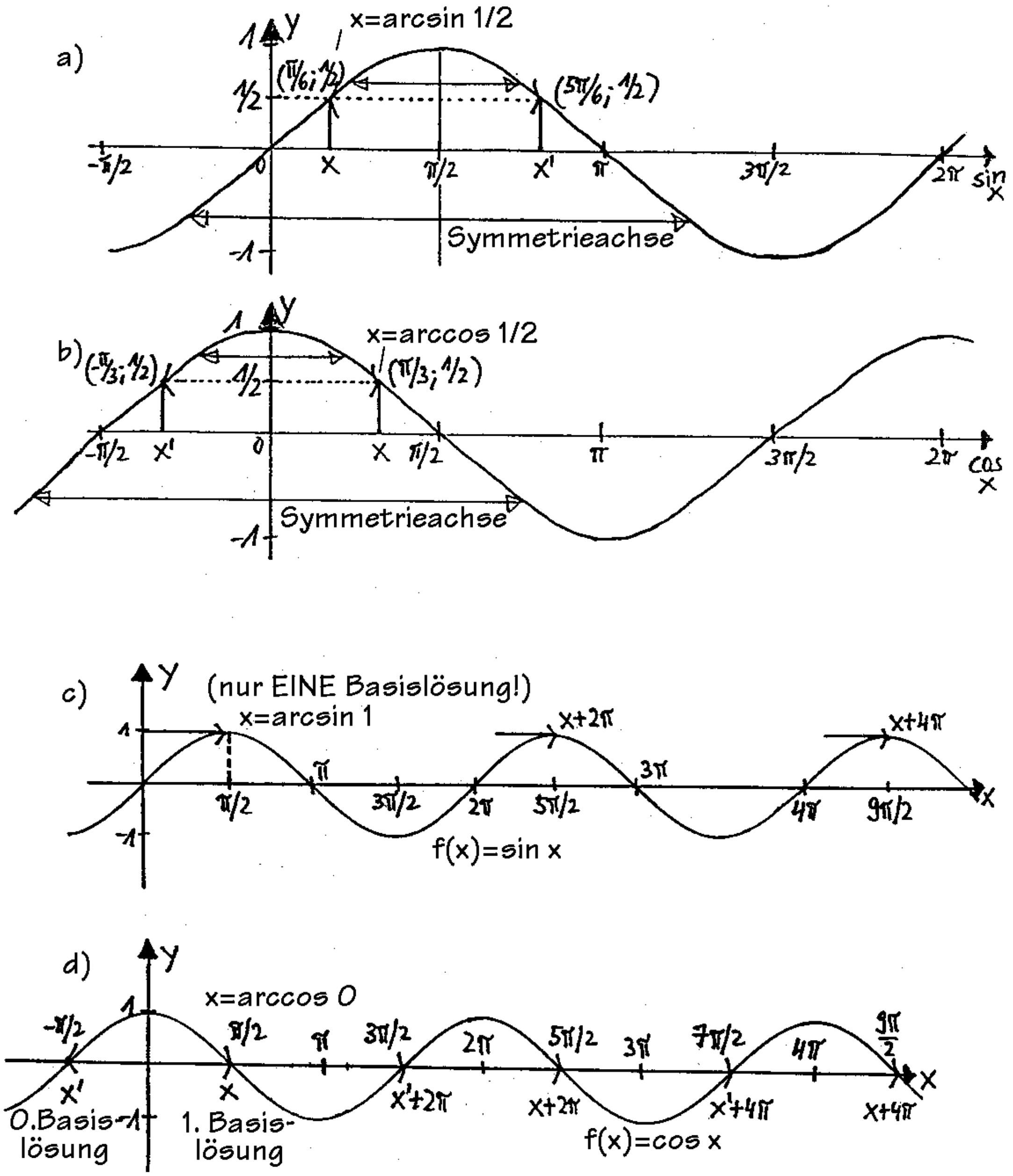


Abbildung 2-9 Darstellung der Basislösungen

Daher findet man zu jedem Wert (außer -1 und 1) zwei Basislösungen (Abbildung 2-9b).

Beispiele:

Die Basislösungen für sin x=1/2 {entspricht x=arcsin(1/2)} sind x=π/6 und x'=π-x=5/6π; die Basislösungen für cos x=1/2 {entspricht x=arccos(1/2} sind x=π/3 und x'=-π/3. Vergleiche dazu auch die Abbildung 2-9;

Möchte man **alle** möglichen Lösungen angeben, so ermittelt man die Lösung aus der Wertemenge, bildet die zweite Basislösung, also x', und addiert dann zu beiden 2kπ für Sinus und Kosinus, kπ für Tangens, k∈Z.

Beispiele:

a) Für sin x=1 (bzw. x=arcsin 1) folgt, daß der Sinuswert gleich 1 ist, wenn x = $\pi/2$. Die vollständige Lösung lautet dann x=$\pi/2+2k\pi$, k $\in$ Z. Denn 1=sin($\pi/2$)=sin(5/2π)=sin(9/2π)=... (Abbildung 2-9).

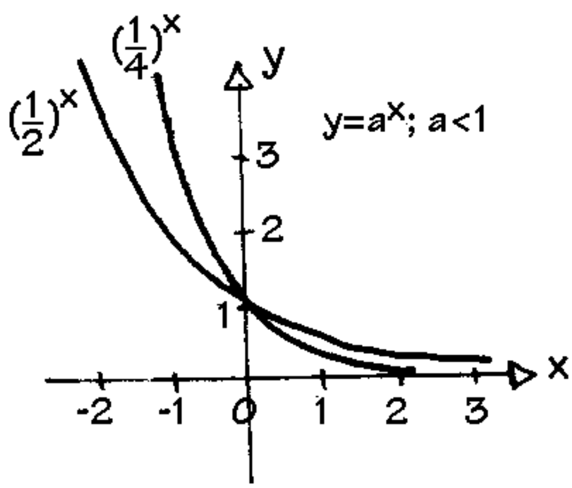
b) Für cos x=0 (bzw. x=arccos 0) folgt, daß der Kosinuswert gleich 0 ist, wenn x=$\pi/2$ (Funktionswert der Arcusfunktion). Die zweite Basislösung lautet x'=-$\pi/2$ (d.h. -x=x'). Die vollständige Lösung ist nun: x=$\pi/2+2k\pi$ v x=-$\pi/2+2k\pi$, k $\in$ Z (Abbildung 2-9).

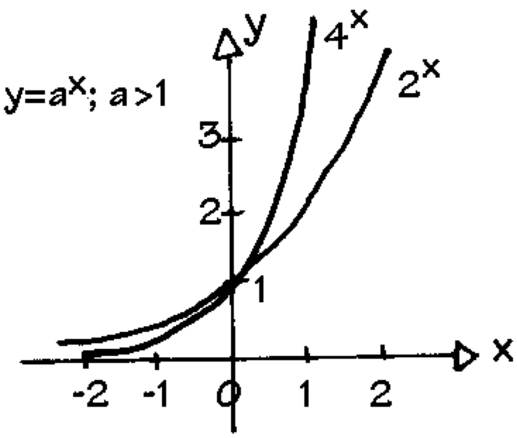
2.2.3 Exponential-, Logarithmus und Hyperbelfunktionen

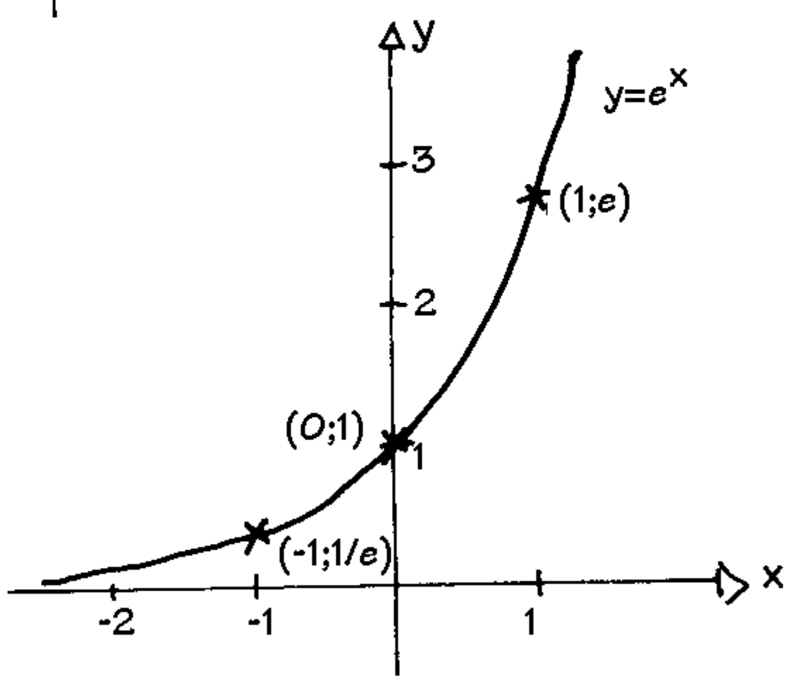
2.2.3.1 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind definiert als $f(x)=a^x$, $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$. Als Wertemenge ergibt sich $\mathbb{R}_+$. Die Funktionen sind stetig und streng monoton.

Ist die Basis a<1 , so ist $f(x)=a^x$ streng monoton fallend, ist a>1, dann ist $f(x)=a^x$ streng monoton steigend (Abbildung 2-11).
Alle Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt [0;1], denn jede Basis potenziert mit der Zahl Null ergibt nach Definition Eins (Abbildung 2-10).







© Kumitz/Voß

Abbildung 2-10 Exponentialfunktionen

Häufig wird als Basis die Eulersche Zahl e genommen. Sie hat vor allem in der Naturwissenschaft eine große Bedeutung. Diese Exponentialfunktion heißt daher natürliche Exponentialfunktion: $f(x)=e^x$ (Abbildung 2-10c). Grundsätzlich gilt jedoch. daß sich jede Potenz der einen Basis in eine mit einer anderen Basis umrechnen läßt:

$$y = a^x = b^{\frac{x}{\log_a b}}$$

2.2.3.2 LOGARITHMUSFUNKTIONEN

Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen zu den Exponentialfunktionen und definiert als $f(x)=\log_a x$ (Logarithmus von x zur Basis a)[34]; $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Jedem x wird die Zahl zugeordnet, mit der a potenziert x ergibt. D.h. $\log_{10}100=2$, da $10^2=100$! Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}_+$, die Wertemenge ist $\mathbb{R}$. Zwischen Logarithmus- und Exponentialdarstellung gilt folgende Äquivalenz[35]

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

[34] $\log_a x$ bezeichnet also den Exponenten, der mit der Basis a den Wert x ergibt!

[35] Es handelt sich um denselben Graphen. Erst durch Vertauschung von x und y bei der Exponentialdarstellung entsteht die Umkehrfunktion, deren Graph anders aussieht (gespiegelt an der Winkelhalbierenden).

© Kumitz/Voß

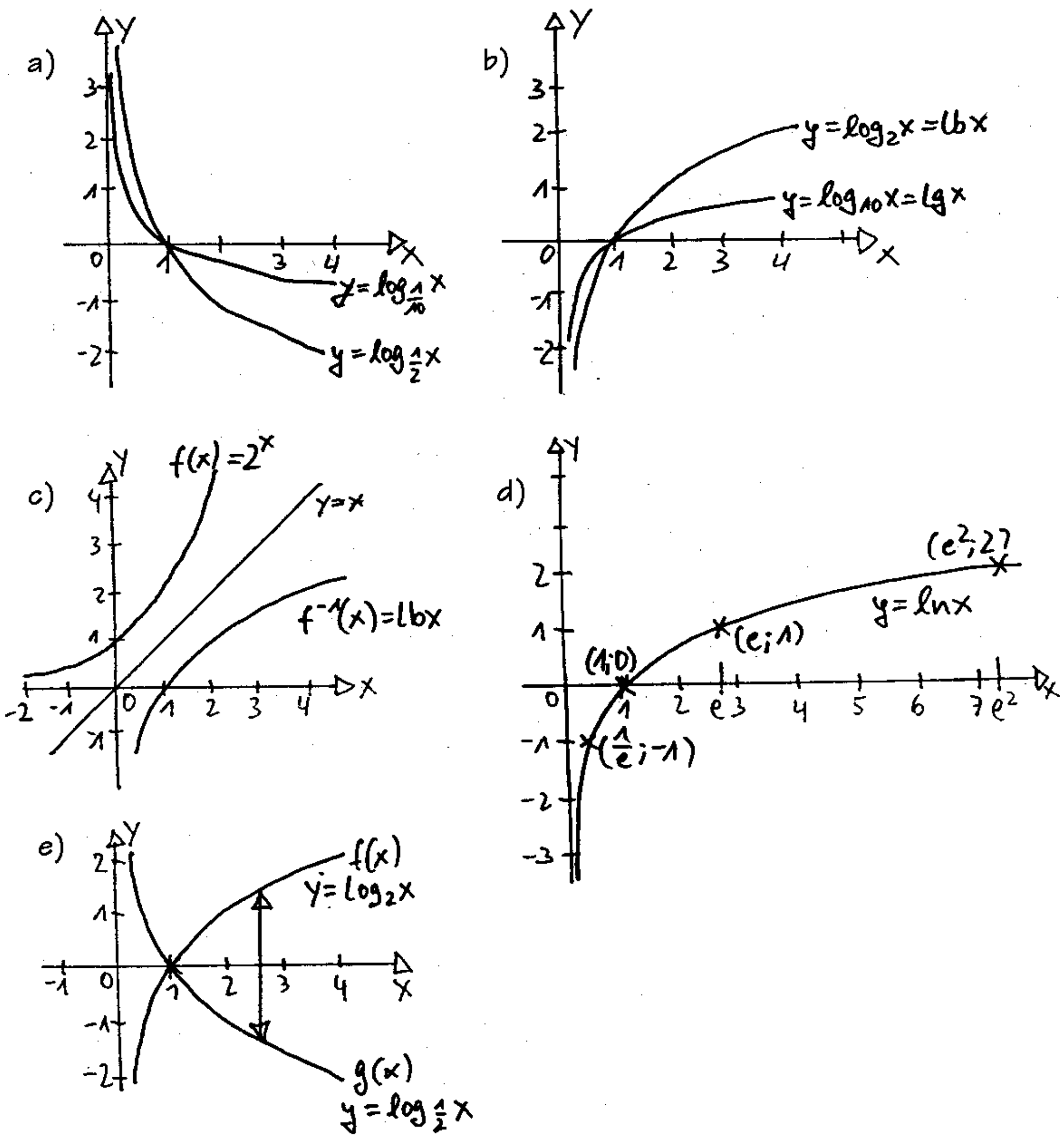


Abbildung 2-11 Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktionen sind streng monoton und zwar fallend für a<1 und monoton steigend für a>1 (Abbildung 2-11). Es gibt häufig gebrauchte Basen, nämlich 2 (Dualsystem), die "natürliche Basis" e und 10 (Dezimalsystem).[36]

Alle Logarithmusfunktionen gehen durch den Punkt P(1;0) (Abbildung 2-11).
Die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktionen lautet: $\log(x_1 \cdot x_2)=\log x_1+\log x_2$ und somit $f(x_1 \cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.
$f(x)=\log_a x$ und $g(x)=\log_{1/a} x$ liegen symmetrisch zur x-Achse (Abbildung 2-11e).

[36] $f(x)=\log_2 x=\text{lb } x$ heißt dyadische oder binäre Logarithmusfunktion (auch Zweierlogarithmusfunktion genannt, Abbildung 2-11b).
$f(x)=\log_e x=\ln x$ heißt natürliche Logarithmusfunktion (Abbildung 2-11d)
$f(x)=\log_{10} x=\lg x$ heißt Briggssche oder dekadische Logarithmusfunktion (auch Zehnerlogarithmusfunktion genannt, Abbildung 2-11b).

© Kumitz/Voß

2.2.3.3 HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN

Die Funktionen Hyperbolischer Sinus[37], Hyperbolischer Kosinus usw. (sinh x, cosh x usw.) sind für unser Schulwissen nicht relevant, dafür um so mehr im naturwissenschaftlichen Bereich. Sie werden mit Hilfe von Exponentialfunktionen zur Basis e definiert:

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Die anderen Funktionen (tanh x, coth x, usw.) bilden sich wie bei den normalen trigonometrischen Funktionen. Auf ihre Anwendungen, ihre Graphen und ihre Umkehrfunktionen braucht hier nicht weiter eingegangen werden.

2.3 VERKNÜPFTE FUNKTIONEN

Man kann Funktionen zu Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten verknüpfen und so neue Funktionen bilden. Ist z.B. $f(x)= 2x-3$ und $g(x)=x^2+1$, so erhalten wir:

$$\text{Summe: } f(x) + g(x) = (2x - 3) + (x^2 + 1) = x^2 + 2x - 2$$

$$\text{Differenz: } f(x) - g(x) = (2x - 3) - (x^2 + 1) = -x^2 + 2x - 4$$

$$\text{Produkt: } f(x) \cdot g(x) = (2x - 3) \cdot (x^2 + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

$$\text{Quotient: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$$

2.4 VERKETTETE FUNKTIONEN

Die Funktion f(x) einer Funktion g(x) wird bezeichnet als $f(g(x))=(f \circ g)(x)$. f ist die äußere und g die innere Funktion. Ist $f(x)=x^2$ und $g(x)=\sin x$ so ist $(f \circ g)(x)=\sin^2 x$.

Achtung! $f \circ g$ ist nicht das gleiche wie $g \circ f$! Das wäre nämlich in obigem Beispiel $(g \circ f)(x)=\sin(x^2)$!

2.5 ELEMENTARE FUNKTIONEN

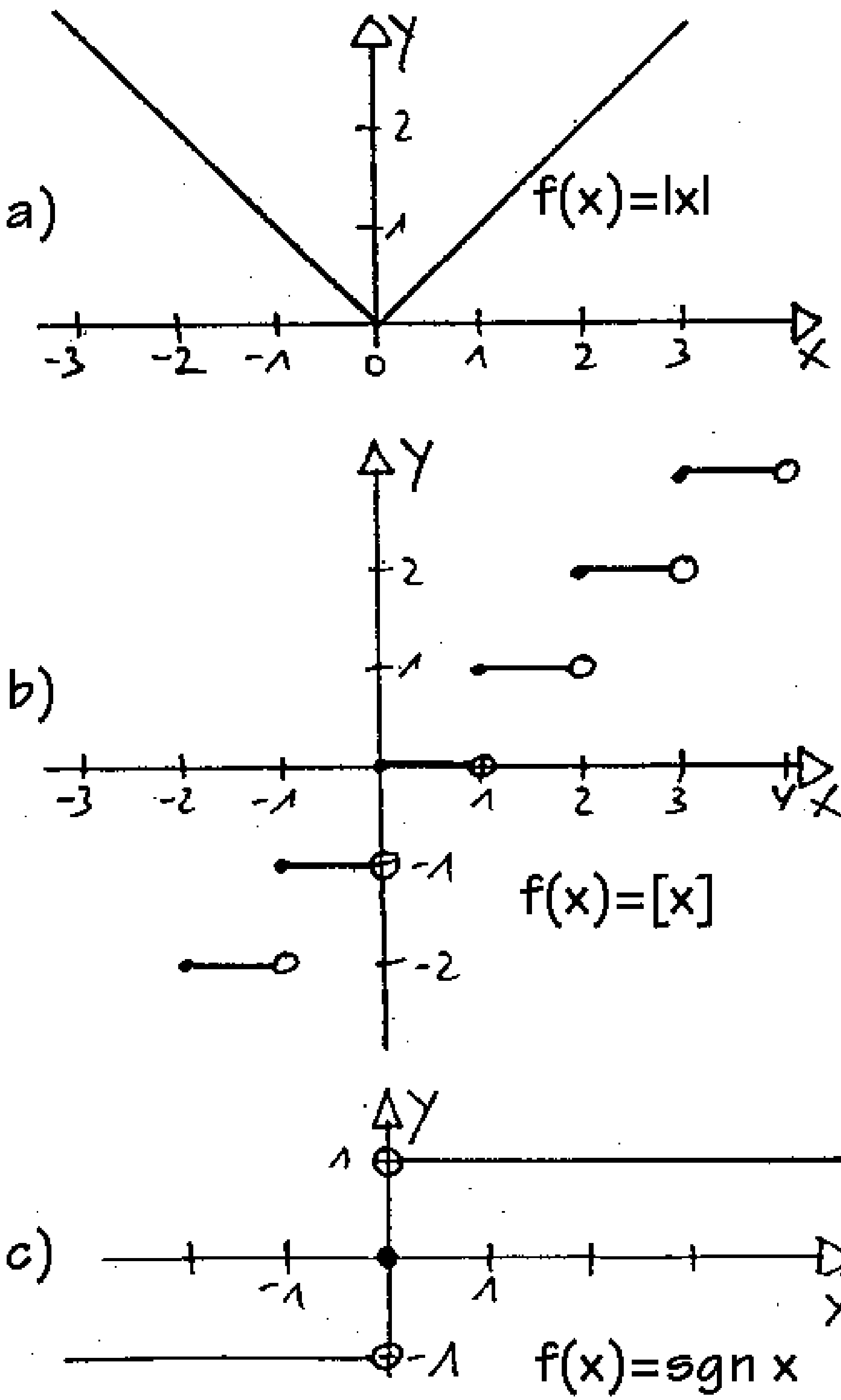
Als elementar werden alle Funktionen bezeichnet, die aus einer endlichen Anzahl von Verknüpfungen und Verkettungen aus transzendenten und algebraischen Funktionen bestehen. Dabei muß die Funktionsgleichung für die ganze Definitionsmenge gleich sein, die Funktionsgleichung also geschlossen, d.h. aus einer Gleichung bestehen. Alle bisher besprochenen Funktionen sind elementar.

[37] Auch sinus hyperbolicus etc. genannt.

© Kumitz/Voß

2.6 NICHT-ELEMENTARE FUNKTIONEN

Eine häufig angewendete, nicht-elementare Funktion ist die sogenannte **Betragsfunktion**: f(x)=|x| (Abbildung 2-12a). Diese Funktion besteht praktisch aus zwei elementaren Funktionen auf zwei verschiedenen Intervallen:



© Kumitz/Voß *Abbildung 2-12 Nicht-elementare Funktionen; a) Betragsfunktion; b) Gaußklammerfunktion; c) Signumfunktion*

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Zwei weitere ähnliche nicht-elementare Funktionen sind die **Signumfunktion** f(x)=sgn(x) und die **Gaußklammerfunktion** f(x)=[x].

Signum (x) ordnet einem negativem x den Wert -1, einem positivem x den Wert +1 und dem x-Wert Null den y-Wert Null zu. Diese Funktion wird z.B. benötigt, wenn man nur das Vorzeichen eines Wertes braucht. Die Betragsfunktion läßt sich mit Hilfe der Signumfunktion einfach definieren als f(x)=x·sgn(x) definieren.[38]

Die Gaußklammer ordnet x die größte ganze Zahl zu, die nicht größer ist als x. Ein Beispiel für die Anwendung dieser Funktion ist die Gebührenberechnung beim Telefonieren. Nach einer bestimmten Zeiteinheit springt die Rechnung eine Gebühr höher. Ist z.B. eine Einheit 8 Minuten, so zahlt man für ein Drei-Minutengespräch genauso viel wie für ein 7 Minutengespräch, für ein 9 Minutengespräch hingegen bereits das Doppelte.

[38] Diese Form der Betragsfunktion wird häufig bei Computern benötigt.

© Kumitz/Voß

Da diese beiden Funktionen wie die hyperbolischen nur für den erweiterten Mathematikunterricht wichtig sind, folgen an dieser Stelle keine weiteren Erklärungen! Lediglich die Graphen der Funktionen sind in Abbildung 2-12 dargestellt.

3 Funktionsveränderungen

Es gibt einfache Methoden, die Graphen von "normalen" Funktionen aus dem vorhergehenden Kapitel zu verändern. Dazu gehören insbesondere das Strecken, Stauchen, Spiegeln und Schieben.

3.1 Die vertikale Verschiebung

Diese kann anschaulich auch als "Fahrstuhleffekt" bezeichnet werden; denn der Graph von f(x) wird mit Hilfe einer zusätzlichen additiven Konstante C nach oben bzw. nach unten (C negativ) verschoben, d.h. in y-Richtung. Die um C nach oben verschobene Funktion g(x) lautet dann: g(x)=f(x)+C. Diese Schreibweise ist allgemein üblich, verkennt jedoch, daß die Konstante C ausschließlich auf die Variable y Einfluß hat, so daß folgende Schreibweise für das Verständnis sinnvoller wäre: g(x)-C=f(x).

Man könnte "C" anschaulich mit einem Fahrstuhl vergleichen, der die Ausgangsfunktion mit C=0 in einem Hotel (das Koordinatensystem) hinauf und hinunter fährt. Dabei verändert sich das allgemeine Verhalten des Graphen in den einzelnen Punkten nicht.

3.2 Die horizontale Verschiebung

Diese Verschiebung kann anschaulich als "Zimmernummereffekt" bezeichnet werden, denn der Graph

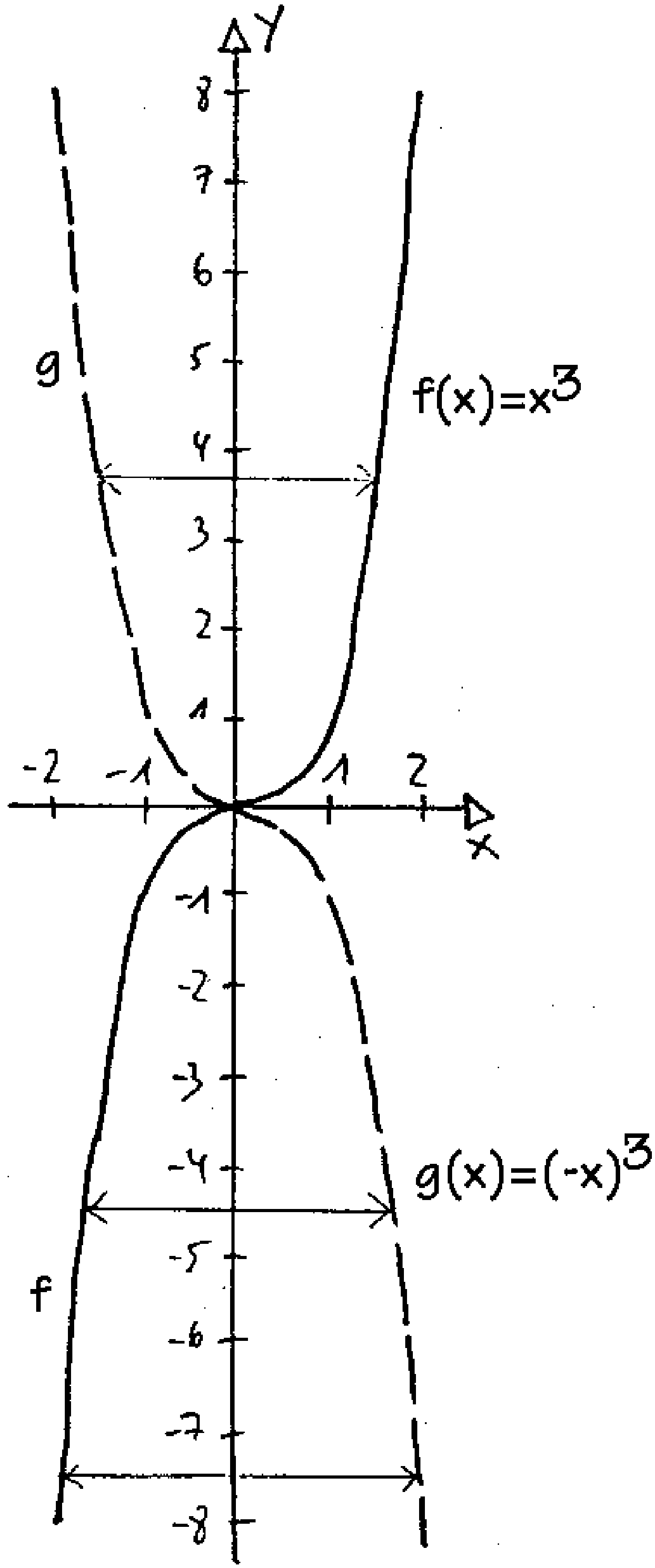


Abbildung 3-1 Spiegelung an der x-Achse

© Kumitz/Voß

von f(x) wird in x-Richtung verschoben, indem alle x in der Funktionsgleichung durch (x-a) ersetzt werden. Der Graph wird dann um a nach rechts verschoben (a>0) bzw. nach links verschoben (a<0). Anders ausgedrückt: bei z.B. (x-3) wird der Graph nach rechts verschoben, bei (x+3) nach links.) Die um a nach rechts verschobene Funktion g(x) lautet: g(x)=f(x-a). In unserem anschaulichen Hotelvergleich wäre a dann die Zimmernummer auf derselben Etage.

3.3 Spiegelung an den Koordinatenachsen

An der x-Achse gespiegelt wird der Graph ganz einfach durch einen Vorzeichenwechsel der jeweiligen Funktionswerte (Abbildung 3-1):

$g(x)=-f(x)$. Z.B. $f(x)=x^2$ und $g(x)=-x^2$.

Der Graph kann natürlich auch an der y-Achse gespiegelt werden: $g(x)=f(-x)$. Z.B. $f(x)=x^3$ und $g(x)=(-x)^3$ (Abbildung 3-1).

3.4 Streckung und Stauchung

Es gibt die Möglichkeit einen Funktionsgraphen in y-Richtung (von der x-Achse aus) und in x-Richtung (von der y-Achse aus) zu verändern. Dabei wird zwischen Strecken (Auseinanderziehen) und Stauchen (Zusammenschieben) unterschieden.

3.4.1 Streckung oder Stauchung in Richtung der y-Achse

Eine solche Veränderung geht immer von der x-Achse aus, und zwar nach oben wie unten. Erreicht wird dies in Richtung der y-Achse durch einen **Faktor** a vor der Funktionsgleichung: $h_1(x)=a\cdot f(x)$.

Der Graph wird in Richtung der y-Achse gestreckt, wenn $|a|>1$ ist. Er wird gestaucht, wenn $|a|<1$ ist. Ist a negativ, so findet zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse statt (Abbildung 3-2).

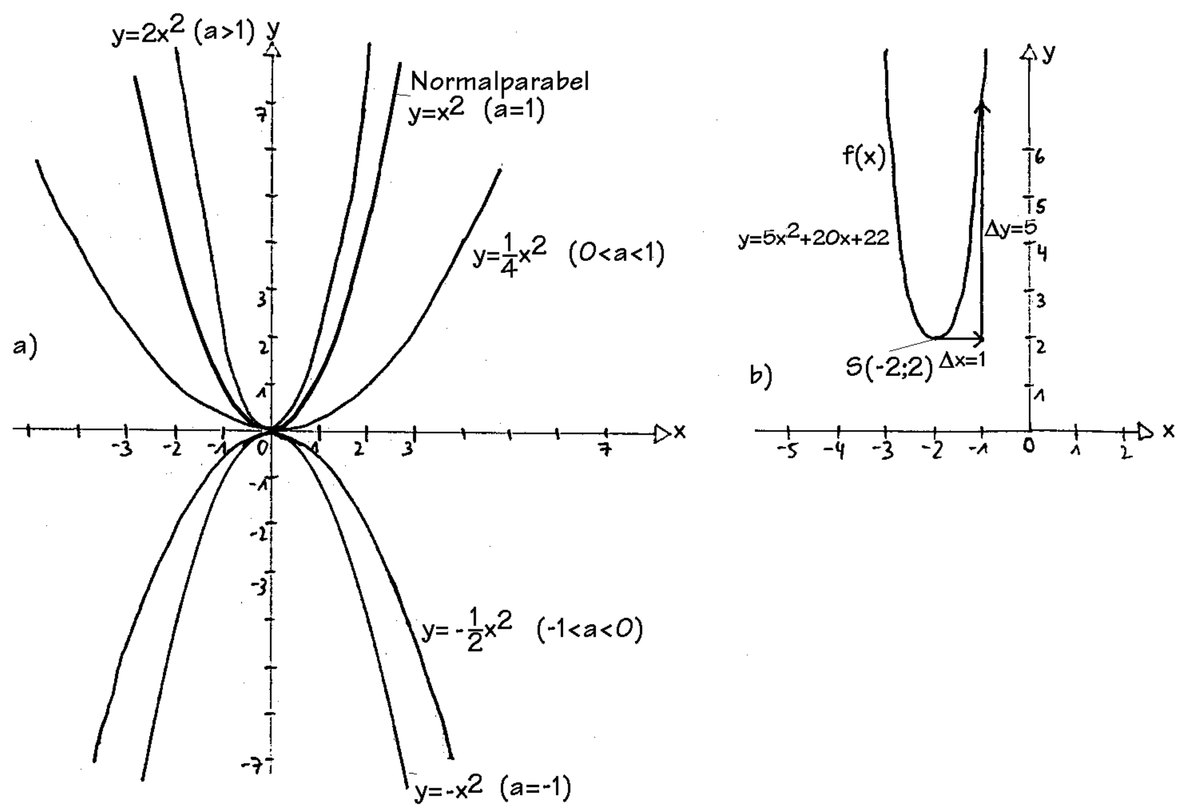


Abbildung 3-2 Streckung und Stauchung von Funktionen

© Kumitz/Voß

3.4.2 Streckung und Stauchung in Richtung der x-Achse

Eine Konstante k vor **allen** x streckt oder staucht den Funktionsgraphen in Richtung der x-Achse von der y-Achse aus nach rechts und links: $h_2(x)=f(k\,x)$.

Der Graph wird in Richtung der x-Achse gestreckt, wenn $|k|>1$. Der Graph wird gestaucht, wenn $|k|<1$ ist. Ist k negativ, so findet wieder zusätzlich eine Spiegelung an der y-Achse statt.

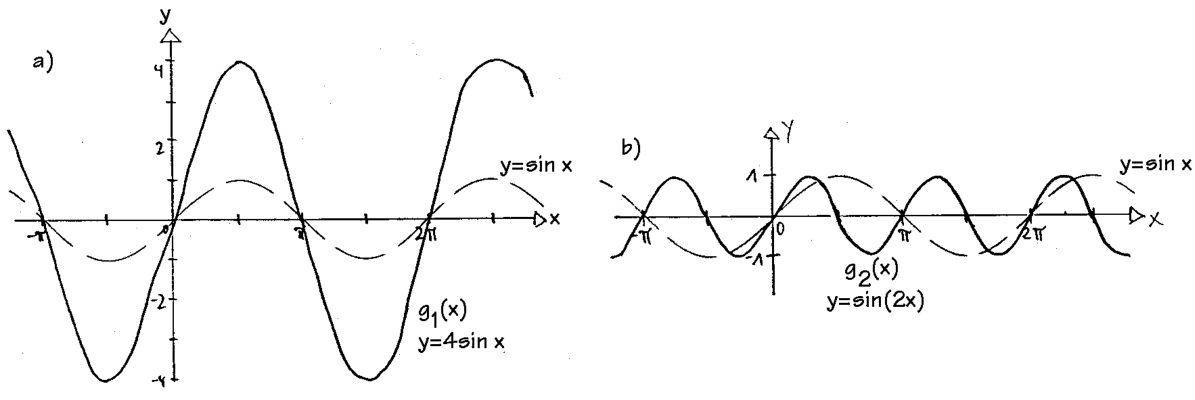


Abbildung 3-3 Strecken und Stauchen bei Sinusfunktionen

3.5 Beispiele

3.5.1 Normalparabel

Sehr schön läßt sich das Schieben und Strecken an der Normalparabel zeigen. Es ist bekanntlich möglich, jede beliebige quadratische Funktion mit dem führenden Koeffizienten 1 (also die Normalform x^2+px+q) auf die Normalparabel zurückzuführen, womit der Graph dann einfach zu zeichnen ist. $f(x)=x^2$ ist die Funktionsgleichung der Normalparabel (Abbildung 2-4a). Wird dieser Graph in y-Richtung verschoben, so gilt: $g_1(x)=x^2+c$.[39] Der in x-Richtung verschobene Graph hingegen lautet $g_2(x)=(x-a)^2$. Der Graph der Funktion $g_3(x)=(x-a)^2+c$ ist die um a nach rechts und um C nach oben verschobene Normalparabel.[40] Der Scheitelpunkt der Normalparabel liegt bei S(a;c) (Abbildung 3-1). Der Graph jeder quadratischen Funktion in der Normalform ist eine verschobene Normalparabel. Es bedarf geringer algebraischer Umformungen, um die Normalform einer quadratischen Gleichung auf die Scheitelpunktform zu bringen, die der obigen Form entspricht: $f(x)-c=(x-a)^2$. Man bringt die Normalform auf die Scheitelpunktform mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung.[41] Bei der Umformung wurde die erste binomische Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ angewandt.

$$y = x^2 + bx + c$$

$$y = x^2 + 2\frac{b}{2}x + c$$

$$y = \underbrace{x^2 + 2\frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

---

[39] Man beachte wieder die andere Darstellungsmöglichkeit: $g_1(x)-c=x^2$.

[40] In der alternativen Darstellung $g_3(x)-c=(x-a)^2$ kann man deutlich erkennen, daß c die y-Koordinaten und a die x-Koordinaten verschiebt. Es ist auch erklärbar, warum Minus den Graphen nach rechts (bzw. oben) verschiebt: Verschoben wird eigentlich das Koordinatensystem, und zwar nach links (bzw. unten)!

[41] Wie der folgenden.

© Kumitz/Voß

$$y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$y + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \qquad \text{(Scheitelpunktform)}$$

$$y - y_S = (x - x_S)^2 \qquad S(x_S; y_S) \text{ bzw. } S\left(-\frac{b}{2}; \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right)$$

Mit einer Normalparabel-Schablone kann jetzt ohne weiteres die Funktion im Koordinatensystem gezeichnet werden!

Beispiele:

$f(x)=x^2+4x+4$. Dies ist ein vollständiges Quadrat, d.h. die binomische Formel kann direkt angewendet werden: $f(x)=(x+2)^2$. Als Scheitelpunkt ergibt sich also S(-2;0).

$g(x)=x^2+6x+4$ ist kein vollständiges Quadrat. In der quadratischen Ergänzung addieren und subtrahieren wir wegen $6x=2\cdot 3\cdot x$ das Quadrat von 3, also 3^2 bzw. 9. Dies gibt dann $x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+4=(x+3)^2-5 \Rightarrow g(x)+5=(x+3)^2$ und daraus folgend S(3;-5).

Mit unserem “Hotelmodell” ergibt sich anschaulich folgende Darstellung:
f(x) ist eine Normalparabel in Zimmer Nummer 2 auf der LINKEN SEITE (da negativ) im ERDGESCHOSS. g(x) (eine Normalparabel) ist in Zimmer Nummer 3 auf der RECHTEN SEITE (da positiv) im fünften UNTERGESCHOSS (da negativ). (Abbildung 2-13c)

In der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung muß der führende Koeffizient a nicht notwendigerweise gleich 1 sein (z.B. $y=5x^2+20x+22$). Die Graphen einer solchen Funktion sind allgemeine Parabeln. Sie unterscheiden sich von der Normalparabel dadurch, daß sie breiter oder schmaler (gestaucht oder gestreckt) und/oder sogar nach unten geöffnet sind. Entscheidend hierfür ist besagter führender Koeffizient a:[42]

$a>0$	Parabel nach oben geöffnet
$a<0$	Parabel nach unten geöffnet
$0<\lvert a\rvert<1$	Parabel breiter als Normalparabel
$\lvert a\rvert>1$	Parabel schmaler als Normalparabel

Man kann nun durch Ausklammern auch eine allgemeine quadratische Funktion auf die Scheitelpunktform bringen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 + 20x + 22 \\ &= 5(x^2 + 4x) + 22 \\ &= 5(x^2 + 2\cdot 2x) + 22 \\ &= 5\left[\underbrace{x^2 + 2\cdot 2x + 2^2}_{(x+2)^2} - 2^2\right] + 22 \\ &= 5(x+2)^2 - 5\cdot 4 + 22 \\ &= 5(x+2)^2 + 2 \quad \text{bzw.} \\ y - 2 &= 5(x+2)^2 \quad \Rightarrow \quad S(-2;2) \end{aligned}$$

---

42 Siehe dazu auch Abbildung 3-2.

© Kumitz/Voß

Der Koeffizient 5 sagt aus, daß die Parabel schmaler als die Normalparabel sein muß, sie ist also sozusagen dünner (Abbildung 3-2b)[43]. Und zwar geht der Graph, wenn man vom Scheitelpunkt in x-Richtung eine Einheit nach Rechts geht, fünf Einheiten nach oben (in y-Richtung). Allgemein gilt, daß ausgehend vom Scheitelpunkt bei $\Delta x=1$ genau $\Delta y=a$ Einheiten nach oben oder unten (wenn a negativ) zu gehen sind.

3.5.2 Beispiel Sinusfunktion

Auch die Sinus-Funktion ist ein gutes Beispiel für solche Funktionsveränderungen. Am häufigsten sind dabei Amplitudenänderungen, Frequenzänderungen und Phasenänderungen.

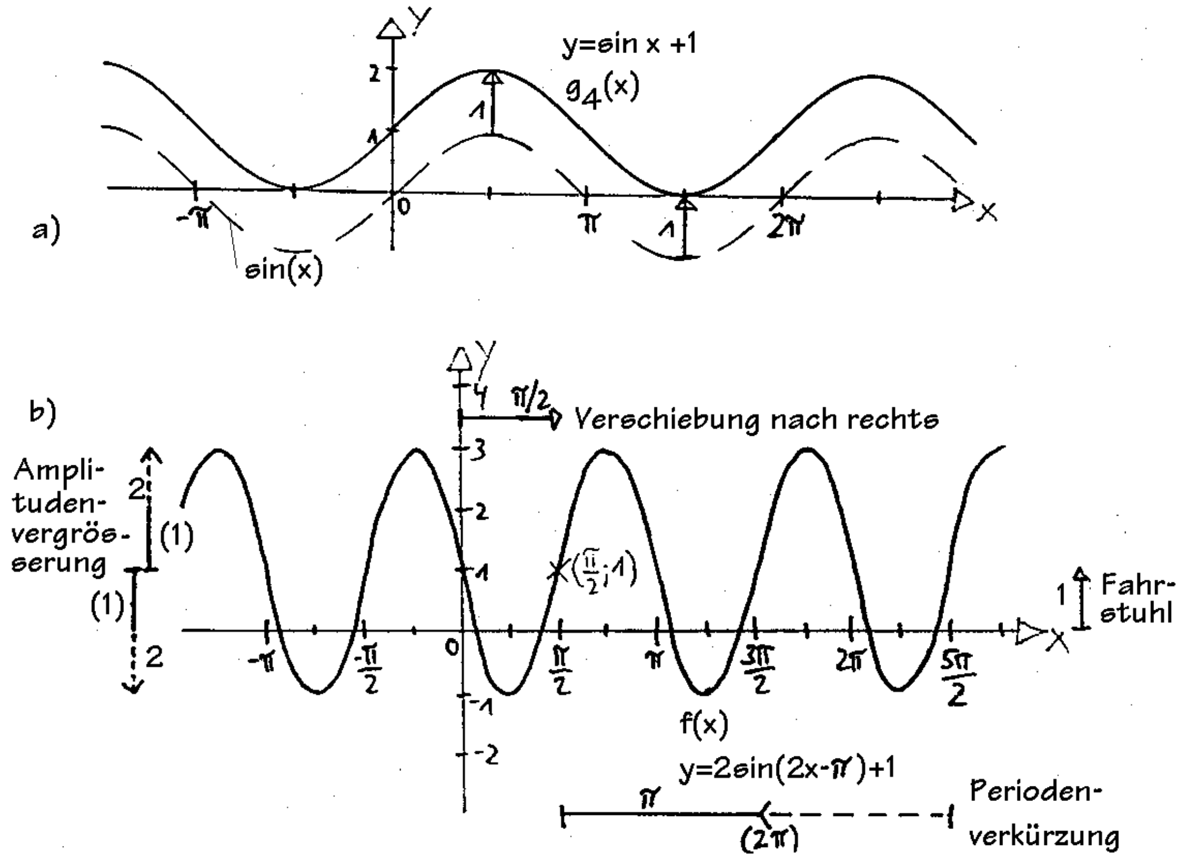


Abbildung 3-4 Amplituden-, Frequenz, und Phasenänderung bei einer Sinusfunktion

3.5.2.1 Amplitudenänderungen

Die Amplitude ist die maximale Ausdehnung der Sinusfunktion in y-Richtung. Diese ist von f(x)=sin x bekanntlich gleich 1. Das bedeutet, die Wertemenge ist {y|-1<y<1}. Soll nun die Amplitude größer oder kleiner werden, so wird die Konstante a vor den Sinus gesetzt: $g_1(x)=a\cdot\sin x$. Die Amplitude ist jetzt a, die Wertemenge ist {y|-a<y<a}, z.B. $g_1(x)=4\cdot\sin x$ (Abbildung 3-3a).

3.5.2.2 Frequenzänderungen

Die Periodendauer einer Schwingung bezeichnet, in welchen Abständen sich der Graph der Funktion wiederholt.[44] Die Periode von f(x)=sin x ist 2□. Um die Periode zu ändern, wird das x einfach mit einem Faktor b multipliziert: $g_2(x)=\sin(bx)$. Die Periode ist dann 2□/b, für y=sin(2x) also gleich □ (Abbildung 3-3b). Je größer b wird, desto kleiner

---

[43] Somit besser "für den Fahrstuhl geeignet"!

[44] Die Frequenz f kennzeichnet dagegen, wie oft sich eine Schwingung innerhalb einer Sekunde wiederholt.

© Kumitz/Voß

wird die Periode. Die Sinuskurve wird schmaler, d.h. der Graph wird in x-Richtung gestaucht. Ist b hingegen kleiner als 1, dann wird die Sinuskurve breiter, d.h. der Graph wird in x-Richtung gestreckt.

3.5.2.3 Horizontale Verschiebung (Phasenänderngen)

Phasenänderungen ändern den Startpunkt der Perioden der Sinusfunktion, anders ausgedrückt, sie verschieben die Sinusfunktion in x-Richtung. Hier gilt das gleiche wie bei allen anderen Funktionen: Die um c in x-Richtung (nach rechts) verschobene Sinusfunktion lautet $g_3(x)=\sin(x-c)$, z.B. $g_3(x)=\sin(x-\pi)$ (Abbildung 3-3c).

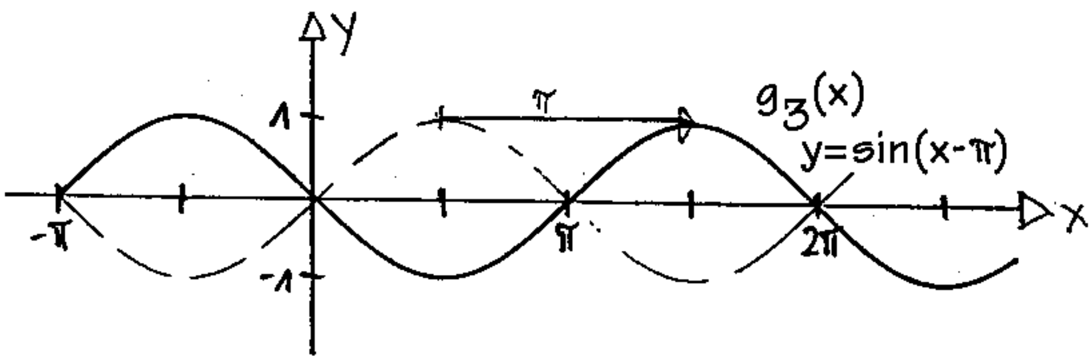


Abbildung 3-5 Horizontale Verschiebung (Phasenänderung) einer Sinusfunktion

3.5.2.4 Vertikale Verschiebung (Fahrstuhl)

Natürlich gibt es auch die Verschiebung mit dem "Fahrstuhl": $g_4(x)-d=\sin x$, z.B. $g_4(x)-1=\sin x$ (Abbildung 3-4a).

3.5.2.5 Kombination von Strecken und Verschieben

Die Funktion $f(x)=a \sin(bx-c)+d$ ist die um c/b (siehe unten) nach rechts und um d nach oben verschobene Sinusfunktion mit der Periode $2\pi/b$ und der Amplitude a. Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$ und die Wertemenge $W=\{y|-a<y<a\}$, z.B. $f(x)=2 \sin(2x-\pi)+1$.

Zu beachten ist, daß hier die Verschiebung in x-Richtung nur $\pi/2$ beträgt, denn da alle x durch (x-c) ersetzt werden müssen, also beide, denn es heißt ja 2x, steht eigentlich da: $f(x)=2\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)+1$. Mit anderen Worten, das "b" muß ausgeklammert werden (Abbildung 3-4b).

3.5.3 Die anderen trigonometrischen Funktionen

3.5.3.1 Tangens und Kotangens

Beim Tangens (und Kotangens) ist die Periode im Gegensatz zur Sinusfunktion nur halb so groß, nämlich π/b. $h_1(x)=\tan(2x)$ hat dann eine Periode von $\pi/2$ (Abbildung 3-6a). Die Wertemenge ist $\mathbb{R}$, d.h. die Konstante a streckt (wenn größer als 1) bzw. staucht (wenn kleiner als 1) den Graphen in y-Richtung; der Begriff der Amplitude kann hier nicht angewandt werden.

© Kumitz/Voß

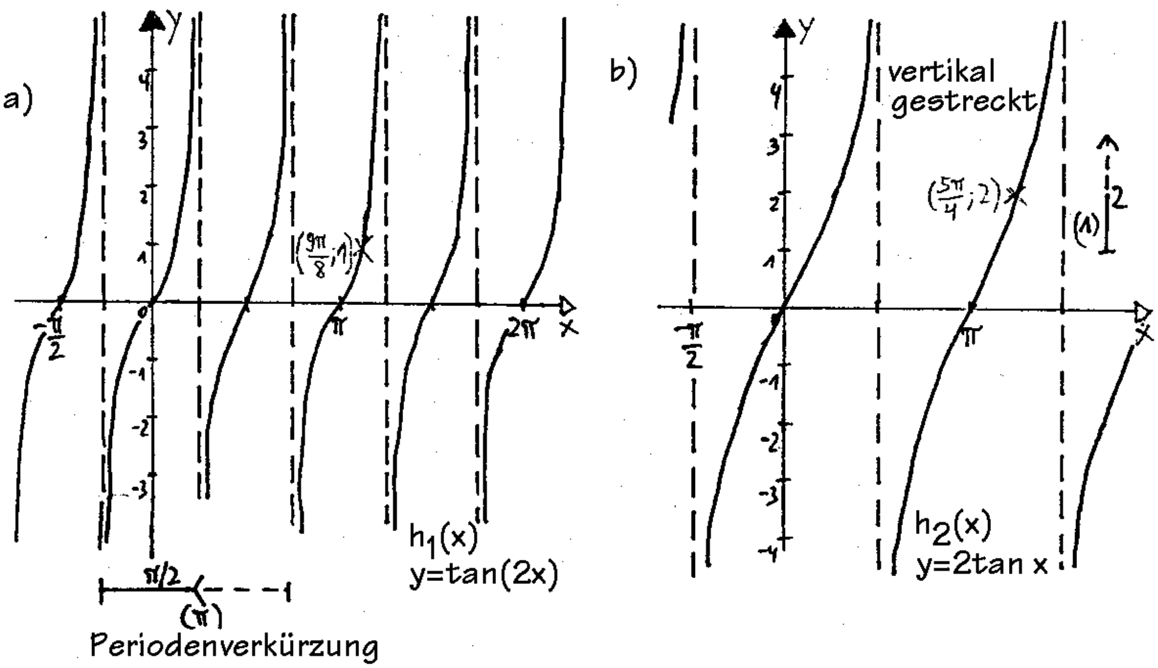


Abbildung 3-6 Strecken und Stauchen bei der Tangensfunktion

Die oben beschriebenen Veränderungen gelten auch für die anderen trigonometrischen Funktionen.

4 Nullstellen

Nullstellen sind die Punkte, an denen der Graph einer Funktion die x-Achse schneidet oder berührt. Solche Nullstellen sind in der Analysis für das Verständnis von Funktionsverläufen sehr wichtig. Nullstellen werden prinzipiell ermittelt, indem man die Funktionsgleichung gleich Null setzt, denn wenn der Graph die x-Achse schneidet oder berührt, ist der Funktionswert y=f(x)=0. Nullstellen werden mit dem x-Wert angegeben (der y-Wert ist

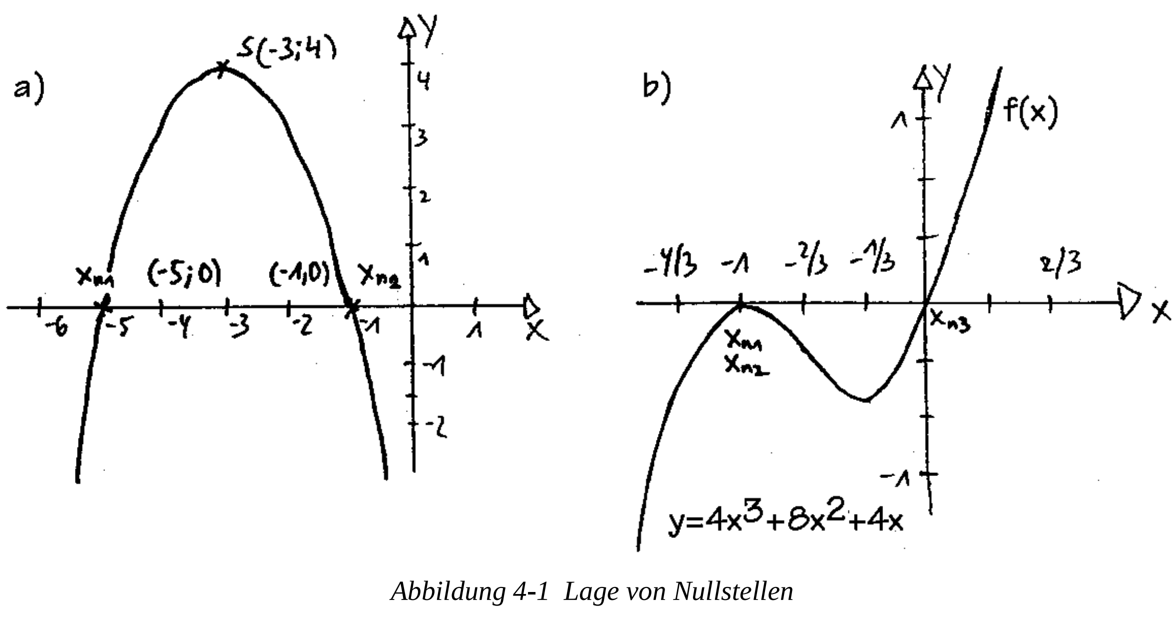


Abbildung 4-1 Lage von Nullstellen

bei einer Nullstelle immer Null). Dieser x-Wert heißt x_0 oder x_n. Gibt es mehrere Lösungen für 0=f(x), z.B. a, b, c usw., so werden sie mit $x_0=a \vee x_0=b \vee x_0=c$ usw.[45] angegeben. Es ist auch möglich die verschiedenen Nullstellen durch x_{n1}, x_{n2}, x_{n3} usw. zu kennzeichnen.

Die Vielfachheit einer Nullstelle unterscheiden wir nach einfachen und mehrfachen Nullstellen. Hat man zum Beispiel ein Produkt, bei dem mehrere der Faktoren für einen x-Wert x_0 sind, so spricht man von einer mehrfachen Nullstelle. Diese Unterscheidung ist deshalb so wichtig, weil sich daraus ergibt, ob der Graph die x-Achse schneidet oder nur berührt.

Bei einfachen und ungeradzahlig mehrfachen (also zum Beispiel dreifachen) Nullstellen, findet ein Vorzeichenwechsel statt; die x-Achse wird geschnitten. Bei geradzahlig mehrfachen Nullstellen (also z.B. doppelten), findet kein Vorzeichenwechsel statt; die x-Achse wird lediglich berührt, z.B $f(x)=x^2$. Dies ist ein Produkt: $x^2=x \cdot x$. Dadurch daß beide Faktoren in der Umgebung von Null ihr Vorzeichen wechseln, bleibt es immer positiv (oder negativ, falls $-x^2$ vorliegt). Die x-Achse wird also nur berührt, der Graph hat links und rechts von x=0 das gleiche Vorzeichen (Abbildung 4-1). $f(x)=x^3=x \cdot x \cdot x$ hat bei x=0 eine dreifache Nullstelle, an x=0 finden also drei Vorzeichenwechsel gleichzeitig statt. Der Graph schneidet wegen der ungeradzahligen Häufigkeit die x-Achse, aus negativen (links von x=0) werden positive (rechts von x=0) Funktionswerte (Abbildung 4-1).

4.1 Rationale Funktionen

4.1.1 Potenzfunktionen mit positiven Exponenten

Ist f(x) eine Potenzfunktion mit positivem Exponenten, z.B. $f(x)=ax^r$, $r \in \mathbb{R}_+$, $r \neq 0$, so gibt es genau eine Lösung für f(x)=0, nämlich $x_0=0$.

4.1.2 Allgemeine ganzrationale Funktionen

Eine ganzrationale Funktion hat höchstens so viele Nullstellen, wie hoch ihr Grad ist. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades also höchstens drei. Die Nullstellen der Polynom-Funktionen ermittelt man häufig durch faktorisieren. Und zwar ist das durch das Faktorisieren entstehende Produkt immer dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Dies bedeutet, um die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion ermitteln zu können, müssen wir die Funktionsgleichung solange faktorisieren (falls möglich!), bis wir für jeden einzelnen Faktor erkennen können, wann dieser gleich Null ist.

4.1.2.1 Konstante und lineare Funktionen

Für die konstanten und linearen Funktionen ist die Nullstellenbestimmung kein Problem, hier reichen einfache Äqivalenzumformungen.

Konstante Funktionen f(x)=k können zwangsweise nur dann Null werden, wenn die Konstante k selbst gleich Null ist. Der Funktionsgraph entspricht dann der x-Achse. Lineare Funktionen werden durch Geradengleichungen beschrieben und können einfach umgestellt werden:

$$f(x_0) = 0 = mx_0 + n \Leftrightarrow x_0 = -\frac{n}{m}$$

4.1.2.2 Quadratische Funktionen

Um die Nullstelle einer quadratischen Funktion $f(x)=ax^2+bx+c$ zu ermitteln, muß man sie erst einmal auf die Normalform bringen, also den Koeffizienten a ausklammern:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + px + q\right)$$

[45] Die Verwendung der Oder-Bedingung ist wichtig, denn x kann ja nicht a, b und c gleichzeitig sein, sondern nur a oder b oder c usw.

© Kumitz/Voß

Die Normalform der quadratischen Gleichung erfordert zwingend, daß der erste Koeffizient (vor dem x^2) gleich +1 lautet! Ist die Normalform ein vollständiges Quadrat (2.1.1.1.2 Allgemeine Ganzrationale Funktionen), so kann man sie zu $(x-z)^2$ faktorisieren und hat genau eine doppelte Nullstelle bei x=z. Ist die Normalform kein vollständiges Quadrat, so muß die sogenannte **pq-Formel** angewandt werden, die bereits in Kapitel 3.5.1 *Normalparabel* prinzipiell hergeleitet wurde. Die Anzahl der möglichen reellen Lösungen[46] ergibt sich durch einfache Überlegung. Eine quadratische Gleichung in Parabelform kann die x-Achse entweder gar nicht schneiden (keine Nullstelle), zweimal schneiden (zwei Nullstellen) oder berühren (eine doppelte Nullstelle).[47]

$$0 = x^2 + px + q$$

$$0 = x^2 + 2\frac{p}{2}x + q$$

$$0 = \underbrace{x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \Big|\sqrt{\ldots}$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \Big| -\frac{p}{2}$$

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$$

$$\vee\ x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$$

Herleitung der pq-Formel

D: Diskriminante

Wieviele Lösungen es gibt, erfährt man durch die **Diskriminante**, die dem Radikanden entspricht:

$$\text{Diskriminante } D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Es gibt drei Möglichkeiten:

a) **D>0**: Jetzt muß die pq-Formel angewandt werden. Es gibt genau zwei Lösungen.

b) **D=0**: Die Funktionsgleichung ist ein vollständiges Quadrat. Jetzt gibt es genau eine Lösung. Der Scheitelpunkt des Graphen liegt auf der x-Achse. Die Nullstelle kann mit Hilfe der binomischen Formeln ermittelt werden (s.o.).

c) **D<0**: Dann gibt es keine Lösung, da wir in der p-q-Formel die Wurzel aus der Diskriminante ziehen werden, und man keine Wurzel aus negativen Zahlen ziehen kann. Der Funktionsgraph befindet sich oberhalb der y-Achse

Beispiele:

$f(x)=-x^2-6x-5$. Da die Nullstellen gesucht sind, folgt $0=-x^2-6x-5$. Um auf die Normalform zu kommen, wird die Gleichung durch (-1) dividiert! $0=x^2+6x+5$. Die pq-Formel liefert jetzt folgende Ergebnisse:

[46] In der Menge der komplexen Zahlen existieren immer zwei Lösungen!

[47] Siehe auch Abbildung 3-1.

© Kumitz/Voß

$$x_0 = -\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5} = -3 + \sqrt{4} = -1 \quad \vee \quad x_0 = -3 - \sqrt{4} = -5$$

Die Funktion selbst hat ihren Scheitelpunkt bei S(-3;4) oberhalb der x-Achse. Da die Parabel jedoch nach unten geöffnet ist, schneiden sehr wohl beide Äste die x-Achse, nämlich bei $P_{N1}(-1;0)$ und $P_{N2}(-5;0)$ (Abbildung 4-1a).

Einen Sonderfall gibt es noch, wenn der Koeffizient b=0 ist, also $f(x)=ax^2+c$. Dann ergeben sich folgende Nullstellen:

$$x_{n1/n2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

4.1.2.3 FUNKTIONEN DRITTEN UND HÖHEREN GRADES

Sehr viel schwieriger wird es bei ganzrationalen Funktionen höheren Grades. Hier hilft es meistens nur, die Funktionsgleichung in Faktoren zu zerlegen, die aus quadratischen, linearen oder konstanten Gliedern bestehen. Letzten Endes wird uns nur die Polynomdivision weiterhelfen, dazu brauchen wir aber erst einmal mindestens eine Nullstelle x_{n1}. Dann kann man nämlich die Polynomfunktion durch $(x-x_{n1})$ teilen. Mögliche ganzzahlige Lösungswerte für f(x)=0 sind auf jeden Fall ganzzahlige Teiler (positiv wie negativ) des konstanten Gliedes (a_0). Ist z. B. $a_0=6$, so entstammen ganzzahlige Lösungen der Menge {-6;-3;-2;-1;1;2;3;6}. Wenn man jetzt alle diese Werte einsetzt, bekommt man unter Umständen eine Nullstelle heraus. Das ist dann der Startwert x_{n1}!

Allgemeine Hinweise zur Vorgehensweise:

a) Meistens ist es praktischer, den führenden Koeffizienten auszuklammern, er beeinflußt danach die Nullstellenberechnung nicht mehr.

b) Hat die Funktionsgleichung kein konstantes Glied, so ist eine Lösung auf jeden Fall $x_0=0$. Dieses x kann dann ausgeklammert werden, z.B.
$f(x)=4x^3+8x^2+4x= 4x(x^2+2x+1)=4x(x+1)^2$.
Die Nullstellen lauten dann $x_{n1}=-1$ (doppelt, wegen des Quadrats) und $x_{n2}=0$ (einfach) (Abbildung 4-1b).

c) Manchmal lassen sich Funktionen höheren Grades nach den binomischen Formeln (sogenannte biquadratische Funktionen) zusammenfassen, z.B.
$f(x)=x^4+2x^2+1= (x^2+1)^2$.
Die jeweils doppelten Nullstellen liegen bei $x=\pm 1$.

d) Funktionen höheren Grades lassen sich manchmal nach polynomischen Formeln faktorisieren. Genannt seien hier die trinomischen Formeln:

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3ax^2+a^3$$
$$(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$$
$$(x+a)\,(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3$$
$$(x-a)\,(x^2+ax+a^2)=x^3-a^3$$

e) Manchmal hilft einem auch das Pascalsche Dreieck weiter, mit dem sich die übrigen polynomischen Formeln höheren Grades fortsetzen lassen. Es ist aber schon Glückssache, gerade die Koeffizienten aus dem Pascalschem Zahlendreieck in der Funktionsgleichung zu haben, z.B.
$f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1=(x+1)^4$

1	$(a+b)^0=1$
1 1	$(a+b)^1=a+b$
1 2 1	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5=...$
1 6 15 20 15 6 1	$(a+b)^6=...$
usw.	

f) Wenn keine der oben angegebenen Möglichkeiten in Betracht kommen, müssen numerische Verfahren zur Nullstellenbestimmung angewendet werden!

4.1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Die Nullstellen ermitteln sich wie bei den ganzrationalen Funktionen. Entscheidend ist nur der Zähler; ist dieser gleich Null, so ist auch die Funktion für diese x-Werte gleich Null. Es ist jedoch darauf zu achten, daß die Nullstellen Teil der Definitionsmenge, also nicht gleichzeitig Nullstellen des Nennerpolynoms sind!

4.2 Wurzelfunktionen

Eine Wurzel ist dann gleich Null, wenn der Radikand gleich Null ist. Dies ergibt sich schon aus der Tatsache, daß die Wurzeln bekanntlich Teil der Potenzfunktionen sind: $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

4.3 Trigonometrische Funktionen

Bei den "einfachen" trigonometrischen Funktionen lassen sich die Nullstellen ohne Probleme berechnen:
f(x)=sin x: $x_0=k\pi$, $k \in Z$ (geradzahlige Vielfache von π)

f(x)=cos x: $x_0 = \frac{\pi}{2}(1+2k)$, $k \in Z$ (ungeradzahlig Vielfache von $\pi/2$)

f(x)=tan x: $x_0=k\pi$, $k \in Z$ (geradzahlige Vielfache von π)

Treten die trigonometrischen Funktionen in Kombination mit anderen oder untereinander auf, so müssen meistens mehrere der Formeln für die trigonometrischen Funktionen angewandt werden, die man jeder mathematischen Formelsammlung oder dem Anhang entnehmen kann. Häufig reicht es aber auch, sich zu überlegen, wie der Graph verändert wurde und den Graphen zu zeichnen.

4.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Alle Exponentialfunktionen in der Form $f(x)=a^x$ haben **keine** Nullstelle.
Alle Logarithmusfunktionen der Form $f(x)=\log_a x$ haben die Nullstelle $x_0=1$.

Funktionen, die aus Kombinationen von Exponential- und Logarithmusfunktionen auftreten, sind meistens nur numerischen Verfahren zugänglich!

5 Numerische Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Die beiden bekanntesten numerischen Verfahren sind das Verfahren nach Newton (Tangentennäherungsverfahren) und die Regula-Falsi (Sekantennäherungsverfahren). Man nennt sie Iterationsverfahren[48], weil sie mit jeweils einem neuen Startwert so lange wiederholt werden, bis sich ein gefundener Wert nur noch geringfügig vom vorherigen unterscheidet. Zuerst wählt man einen grundsätzlich beliebigen Startwert, eine sogenannte Wurzel (am besten geschieht dies nach dem Sturmschen Satz[49]). Dann werden in einer Iteration mit Hilfe von Tangenten bzw. Sekanten immer neue Wurzeln ermittelt, die der tatsächlichen Nullstelle schließlich bis auf die gewünschte Genauigkeit nahe kommen. Diese Iteration kann in einem Hornerschen Schema ausgedrückt werden.

48 lat. iteratio: Wiederholung

49 Für Interessierte der Sturmsche Satz: Seien a_n die Koeffzienten des Polynoms n-ten Grades, dann liegen alle reellen Nullstellen im Intervall I=[-M;M] mit $M=1+|a_{n-1}|+...+|a_1|+|a_0|$

© Kumitz/Voß

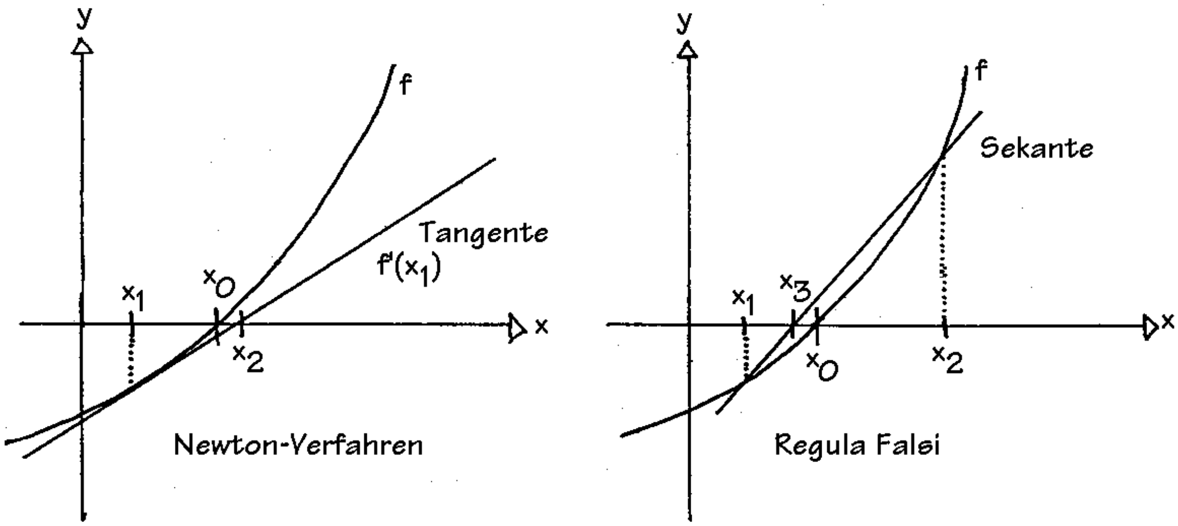


Abbildung 5-1 Numerische Bestimmung von Nullstellen

5.1 DAS VERFAHREN VON NEWTON

Für das Newtonsche Verfahren braucht man nur einen Startwert x_1. Legt man nun an den Graphen am Punkt $P(x_1;f(x_1))$ eine Tangente (Gerade) an, so schneidet sie die x-Achse in größerer Nähe von x_0 als x_1 (Abbildung 5-1). Einzige Bedingung ist, daß der Funktionswert von x_1 und die “Beschleunigung” von $f(x_1)$, also $f''(x_1)$ das gleiche Vorzeichen haben. Der Ansatz für die Iteration ergibt sich aus Abbildung 5-1:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Der einzige Nachteil des Verfahrens ist, daß bei komplizierten Funktionen nicht unbedingt die erste Ableitung der Funktion bestimmt werden kann.

5.2 DIE REGULA-FALSI

Für das Regula-Falsi-Verfahren werden zwei x-Werte benötigt, zwischen denen jedoch die gesuchte Nullstelle liegen muß[50]. Diese x-Werte seien x_1 und x_2, dann ist der Näherungswert x_3. Der Ansatz ergibt sich wieder einfach aus Abbildung 5-1:

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1)$$

Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

---

[50] In einigen Fällen konvergiert das Verfahren auch, wenn die Nullstelle außerhalb von den Startwerten liegt. Konvergenz bedeutet hier, daß die Zahlenfolge auf einen Nullstellenwert hinläuft und nicht divergent ist, d.h. sich von der Nullstelle wegbewegt.

© Kumitz/Voß

6 Beispiele

6.1 Kurvendiskussion 1

Gegegeben sei folgende Funktion f: $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

1. Maximaler Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, da f(x) eine ganzrationale Funktion.

2. Schnitt- und Berühungspunkte mit den Achsen:
   a) y-Achse: Bedingung $f(0)=y_0$ (x muß 0 sein!); $y_0=0 \Rightarrow P_y(0;0)$. Dadurch automatisch auch Schnitt- oder Berührungspunkt mit der x-Achse
   b) x-Achse: Begingung $f(x_0)=0$;
   $$f(x_0) = 0 = \frac{1}{3}x_0^3 - x_0^2 = x_0^2\left(\frac{1}{3}x_0 - 1\right)$$
   $x_0=0$ wegen des Quadrats doppelte Nullstelle, also ein Berührungspunkt, der zugleich ein relatives Extremum sein muß. Aufgrund der Funktionswerte in der Umgebung von x=0 (negative Werte) ergibt sich ein relatives Maximum (Hochpunkt). Der zweite Faktor führt zu:
   $$\left(\frac{1}{3}x_0 - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 3 \qquad P_{x1}(0;0) \quad P_{x2}(3;0)$$

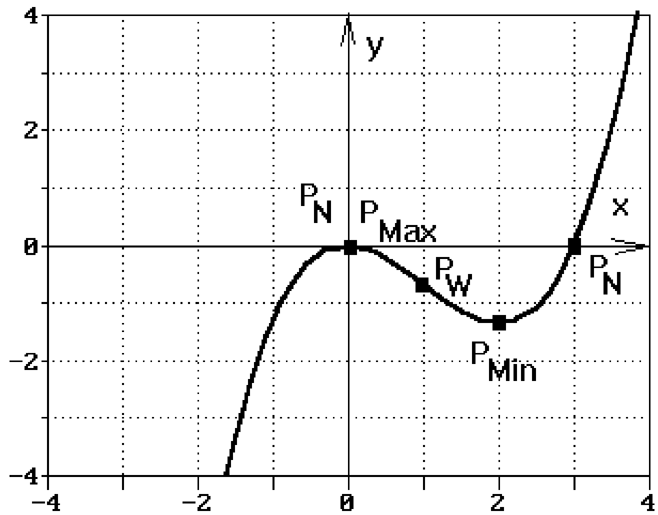
3. Symmetrien
   Punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn f(-x)=-f(x)
   y-Achsensymmetrisch, wenn f(-x)=f(x)
   Da gerade **und** ungerade Exponenten auftreten, **keine** Symmetrie.

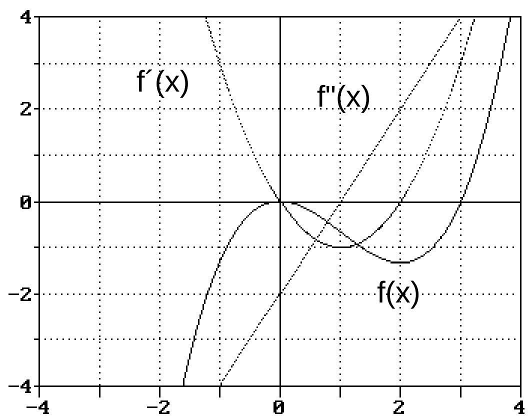
4. Relative Extrema (Hoch- und Tiefpunkte)
   Notwendig ist $f'(x_E)=0$ und hinreichend ein VZW von f´ in einer genügend kleinen Umgebung von x_E oder alternativ zum VZW $f''(x) \neq 0$.
   $$f'(x) = x^2 - 2x$$
   $$f''(x) = 2x - 2$$
   Nullsetzen der ersten Ableitung führt zu:
   $$0 = x_E^2 - 2x_E = x_E(x_E - 2) \quad | \text{ Ein Produkt …}$$
   $$x_E = 0 \quad \vee \quad x_E = 2$$

   VZW überprüfen:
   $$\begin{array}{lll} x_E = 0; & f'(-1) > 0 & \\ & f'(1) < 0 & \text{VZW von + nach - : rel. Hochpunkt} \quad P_H(0;0) \\ x_E = 2; & f'(1) < 0 & \\ & f'(3) > 0 & \text{VZW von - nach + : rel. Tiefpunkt} \quad P_T\left(2;-\frac{4}{3}\right) \end{array}$$
   $$\text{Alternative Überprüfung durch } f''(x): \quad f''(0) < 0 \Rightarrow \text{rel. Hochpunkt}$$
   $$f''(2) > 0 \Rightarrow \text{rel. Tiefpunkt}$$

4. Wendepunkte:
   Notwendig ist $f''(x_W) = 0$ und hinreichend wieder ein VZW bzw. $f'''(x_W) \neq 0$ (Hier sollen Wendepunkte nicht auf ihre Existenz untersucht werden!)
   $$f''(x_W) = 0 = 2x_W - 2 = 0 \Rightarrow x_W = 1 \qquad P_W\left(1;-\frac{2}{3}\right)$$

5. Sämtliche angegebenen Punkte mit den entsprechenden Koordinaten eintragen (**keine Wertetabelle):**





6.2 KURVENDISKUSSION 2

Gegegeben sei folgende Funktion f: $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ $\qquad x \in D$;

1. Maximaler Definitionsbereich: die Funktion ist dort nicht definiert, wo die Nullstellen des Nenners liegen $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$, da der Nenner nicht Null werden kann (nach oben verschobene Normalparabel - "Fahrstuhl").

2. Schnitt- und Berühungspunkte mit den Achsen:
   a) y-Achse: Bedingung $f(0)=y_0$ (x muß 0 sein!); $y_0=-1 \Rightarrow P_y(0;-1)$
   b) x-Achse: Begingung $f(x_0)=0$; Nullstellen eines Quotienten entsprechen den Nullstellen des Zählers, wenn der Nenner an diesen Stellen ungleich Null ist (sonst Lücke!):
   $$0 = x_0^2 - 1$$
   $$x_0 = \pm 1 \text{ (wegen Achsensymmetrie zu erwarten)}$$

3. Polstellen

Die Polstellen sind die Nullstellen des Nenners (Definitionslücken), wenn der Zähler nicht gleichzeitig Null wird (sonst Lücke). f(x) hat keine Polstellen (siehe oben).

4. Symmetrien

Punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn $f(-x)=-f(x)$
y-Achsensymmetrisch, wenn $f(-x)=f(x)$
Da nur geradzahlige Exponenten auftreten, ist f(x) y-Achsensymmetrisch.

5. Asymptoten

Zerlegung der Funktion in einen ganzrationalen und einen echtgebrochen-rationalen Teil durch Polynomdivision:

$$(x^2-1):(x^2+1)=1-\frac{2}{x^2+1}\Rightarrow y_A = g(x)$$

$$\underline{-(x^2+1)}$$

$$0\;-2$$

A(x)=1

6. Relative Extrema (Hoch- und Tiefpunkte)

Notwendig ist $f'(x_E)=0$ und hinreichend ein VZW von f' in einer genügend kleinen Umgebung von x_E oder alternativ zum VZW $f''(x)\neq 0$.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{u}{v}\quad \text{Quotientenregel anwenden!}$$

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{r}{s}$$

$$f''(x)=\frac{r's-rs'}{s^2}=\frac{4(x^2+1)^2-4x\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}\qquad \text{Quotienten- und Kettenregel}$$

1. Ableitung gleich Null setzen: $4x_E=0 \Rightarrow x_E=0$
2. VZW überprüfen:

$x_E=0;\quad f'(-1)<0$ ✓

$f'(+1)>0$ ✓ VZW von - nach +: rel. Tiefpunkt $P_T(0;-1)$

Alternative Überprüfung durch f''(x): $f''(0)>0 \Rightarrow$ rel. Tiefpunkt.

7. Wendepunkte

Notwendig ist $f''(x_W)=0$ und hinreichend wieder ein VZW bzw. $f'''(x_W)\neq 0$ (Hier sollen Wendepunkte nicht auf ihre Existenz untersucht werden!)

$$f''(x_W)=0 = 4(x_W^2+1)^2-4x_W\cdot 2(x_W^2+1)2x_W = 4(x_W^4+2x_W^2+1)-16x_W^4-16x_W^2$$

$$=-12x_W^4-8x_W^2+4=-12\,Erna^2-8\,Erna+4\quad,\text{ wenn } Erna = x_W^2$$

$$0=Erna^2+\frac{8}{12}Erna-\frac{4}{12}\;\Rightarrow\; Erna=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}$$

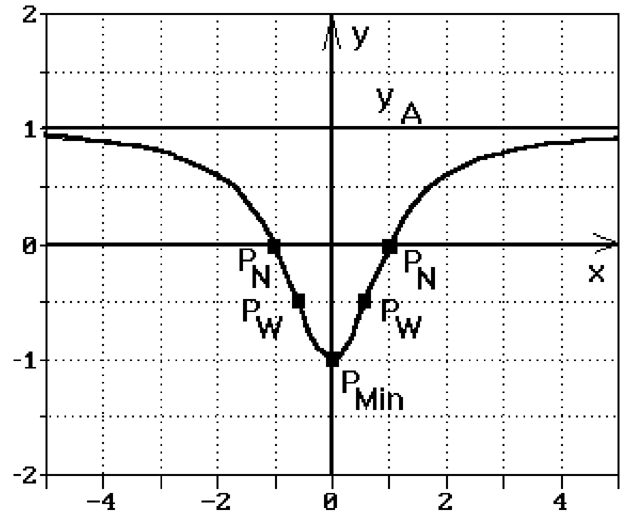
$$Erna=-1\quad\vee\quad Erna=\frac{1}{3}$$

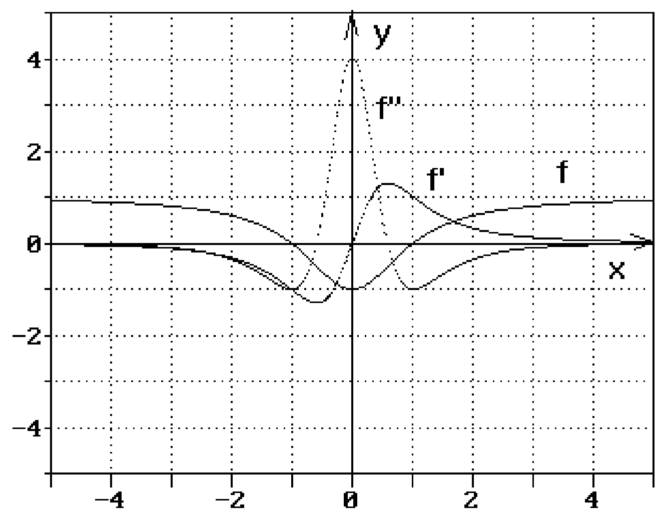
Nur $\frac{1}{3}$ kann Lösung für $Erna^2$ sein: $x=\sqrt{Erna}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$$P_W\left(-\sqrt{\frac{1}{3}};-0{,}5\right)\qquad P_W\left(\sqrt{\frac{1}{3}};-0{,}5\right)$$

8. Sämtliche angegebenen Punkte mit den entsprechenden Koordinaten eintragen (**keine Wertetabelle):**

© Kumitz/Voß





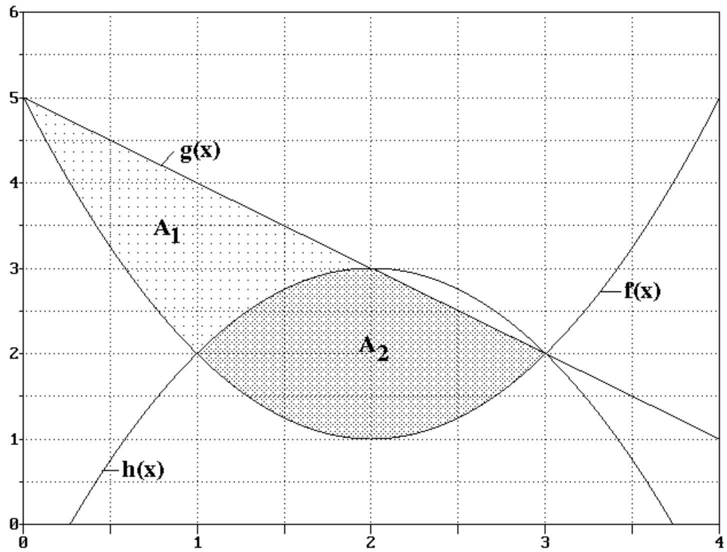
6.3 FLÄCHENBERECHNUNG

Aufgabe: Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f, g und h![51]

[51] Aus: Bigalke - Schröder, Mathematik 12.1, Cornelsen Verlag, Seite 47, 12a.

© Kumitz/Voß

1. Skizze erstellen:
Entsprechend der Aufgabenstellung soll die Fläche von den **drei** Funktionen begrenzt sein. Daraus folgt dann, daß zwei verschiedene Flächen möglich sind, A_1 und A_2. Diese Flächen müssen getrennt betrachtet werden, denn $A=A_1+A_2$ wird nur von **zwei** Flächen begrenzt! Aus der Skizze sind die zu berechnenden Schnittpunkte ersichtlich. Diese müssen berechnet werden, obwohl sie aus der Skizze als ganzzahlige x-Werte zu entnehmen sind!



2. Schnittpunkte bestimmen:
a) zwischen f(x) und g(x):
Ansatz:

$$f(x_s) = g(x_s)$$
$$x_s^2 - 4x_s + 5 = -x_s + 5$$
$$x_s^2 - 3x_s = 0$$
$$x_s \cdot (x_s - 3) = 0$$
$$x_s = 0 \vee x_s = 3$$

b) zwischen f(x) und h(x)

$$f(x_s) = h(x_s)$$
$$x_s^2 - 4x_s + 5 = -x_s^2 + 4x_s - 1$$
$$2x_s^2 - 8x_s + 6 = 0$$
$$x_s^2 - 4x_s + 3 = 0$$
$$x_s = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$
$$x_s = 3 \vee x_s = 1$$

c) zwischen g(x) und h(x)

$$g(x_s) = h(x_s)$$
$$-x_s + 5 = -x_s^2 + 4x_s - 1$$
$$x_s^2 - 5x_s + 6 = 0$$
$$x_s = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6}$$
$$x_s = 2{,}5 \pm 0{,}5$$
$$x_s = 3 \vee x_s = 2$$

© Kumitz/Voß

3. Intervallweise Integration:

$$A_1 = \left|\int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right)dx\right| + \left|\int_1^2 \left(g(x) - h(x)\right)dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 \left(x^2 - 3x\right)dx\right| + \left|\int_1^2 \left(x^2 - 5x + 6\right)dx\right|$$

$$= \left|\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right|_0^1 + \left|\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right|_1^2$$

$$= \left|\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right| + \left|\frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12 - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6\right)\right| = \left|-\frac{7}{6}\right| + \left|\frac{14}{3} - \frac{23}{6}\right|$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} = 2\ \text{FE}$$

$$A_2 = \left|\int_1^2 \left(f(x) - h(x)\right)dx\right| + \left|\int_2^3 \left(f(x) - g(x)\right)dx\right|$$

$$= \left|\int_1^2 \left(2x^2 - 8x + 6\right)dx\right| + \left|\int_2^3 \left(x^2 - 3x\right)dx\right|$$

$$= \left|\frac{2}{3}x^3 - \frac{8}{2}x^2 + 6x\right|_1^2 + \left|\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right|_2^3$$

$$= \left|\frac{2}{3}8 - \frac{8}{2}4 + 12 - \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2} + 6\right)\right| + \left|\frac{27}{3} - \frac{3}{2}9 - \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2}4\right)\right|$$

$$= \left|\frac{16}{3} - 16 + 12 - \left(\frac{8}{3}\right)\right| + \left|9 - \frac{27}{2} - \left(-\frac{10}{3}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{4}{3} - \frac{8}{3}\right| + \left|-\frac{27}{6} + \frac{20}{6}\right| = \frac{4}{3} + \frac{7}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5\ \text{FE}$$

© Kumitz/Voß

7 FORMELSAMMLUNG

7.1 POTENZEN

$a^m a^n = a^{m+n}$; $\quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\quad a^m b^m = (ab)^m$; $\quad (a^m)^n = a^{mn}$

$a^0 = 1$; $\quad \dfrac{1}{a} = a^{-1}$; $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

7.2 WURZELN[52]

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$; $\quad \sqrt{a^m} = \left(\sqrt{a}\right)^m$; $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

7.3 BINOMISCHE FORMELN

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

7.4 PQ-FORMEL

Gegeben sei die quadratische Gleichung in **Normalform**[53]: $0 = x^2 + px + q$. Dann ergeben sich für x folgende Lösungen: $x = -\dfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q} \ \vee \ x = -\dfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

7.5 WINKELFUNKTIONEN (ADDITIONSTHEOREME)

$\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{\alpha}{360°}$ (x im Bogenmaß und α im Gradmaß)[54]

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ (Punktsymmetrie)

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (Achsensymmetrie)

$\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ bzw. $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ bzw. $\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Pythagoras in Winkelform)

---

[52] Sämtliche Regel der Wurzelrechnung lassen sich mit den Regeln der Potenzrechnung erklären.

[53] Liegt eine Gleichung in einer anderen Form vor, so ist sie **vor** Anwendung der pq-Formel durch Äquivalenzumformungen auf diese Normalform zu bringen!

[54] Auf dem Taschenrechner wird für Rechnungen im Bogenmaß RAD (Radian) und für das Gradmaß DEG (Degree) angezeigt!

© Kumitz/Voß

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

x	sin(x)	cos(x)
0°	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
30° $\hat{=}$ π/6	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45° $\hat{=}$ π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
60° $\hat{=}$ π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$
90° $\hat{=}$ π/2	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

gegeben ⇨ gesucht ⇩	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha =$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha =$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\cot\alpha$

© Kumitz/Voß

7.6 ABLEITUNGSREGELN

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = x^m$	$f'(x) = m \cdot x^{m-1}$; $m \in \mathbb{R}$	auch für Wurzeln
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	speziell: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	speziell: $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$f(x) = h(x) \pm g(x)$	$f'(x) = h'(x) \pm g'(x)$	Summenregel
$f(x) = f(\text{erna})$ $\text{erna} = e(x)$	$f'(x) = f'(\text{erna}) \cdot \text{erna}'(x)$	Kettenregel: äußere Ableitung $\cdot$ innere Ableitung
$f(x) = u \cdot v$	$f'(x) = u'v + uv'$	Produktregel
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	Quotientenregel

7.7 INTEGRATIONSREGELN

$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	
$f(x) = x^m$	$F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$; $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	auch für Wurzeln
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$	speziell: $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + C$
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x \ln x - x + C$	
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	
$f(x) = \tan x$	$F(x) = -\ln \cos x + C$	

© Kumitz/Voß

8 MATHEMATISCHE BEGRIFFE

Abszisse
“abscindere” (lat.): abschneiden
Die Abszisse entspricht einem Abschnitt, in der der x-Achse.

Addition
“addere” (lat.): hinzufügen

affin
“affinis” (lat.): verwandt

Algebra
“al dschebr” (arab.): hinüberschaffen
Es wurde beim Rechnen mit Gleichungen gebraucht.

Archimedes
(287-212 v. Chr.) war der größte griechische Mathematiker und Ingenieur des Altertums und wandte die Mathematik erstmals praktisch an.

Arithmetik
“arithmos” (gr.): Zahl
Die Arithmetik ist die Zahlenlehre bzw. Rechenkunst

Asymptote
asymptotos (gr.): nicht zusammenfallend

Basis
“basis” (gr.): Grundlage

Cavalieri, Bonaventura (1598-1647)
war ein italienischer Mathematiker.

komplexe Zahl
“complexus” (lat.): zusammengesetzt

konvergieren
“convergere” (lat.): zusammenstreben

deka
“deka” (gr.): zehn, das Zehnfache
Abkürzung: “da”

dezi
“decem” (lat.): zehn, das Zenhntel
Abkürzung: “d”

Diagonale
“dià” (gr.): durch
“góny” (gr.): Winkel, Ecke

Differenz
“differentia” (lat.): der Unterschied

Diskriminante
“diskriminare” (lat.): unterscheiden, bestimmen

divergieren
“divergere” (lat.): aufeinanderstreben
“Dividend” von “numerus dividendus” (lat.): die zu teilende Zahl

Division
“dividere” (lat.): (ver)teilen

Divisionszeichen
Das Divisionszeichen als Doppelpunkt wurde von dem Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) eingeführt.

Divisor
“divisor” (lat.): der Teiler

Euklid (365-300 v.Chr.)
war griechischer Mathematiker und faßte in seinem Werk “Elemente” in 13 Bänden die mathematischen Kenntnisse seiner Zeit erstmals schriftlich zusammen. Er durchbrach damit förmlich einen Bann, da vor ihm Mathematik nur mündlich weitergegeben wurde.

Euler, Leonhard (1707-1783)
schweizer Mathematiker, führte unter anderem die uns heute geläufige Benennung des Dreiecks ein.

Exponent
“exponere” (lat): herausstellen

Faktor
“factor” (lat.): der Macher, der Wirkende

Funktion
“funktio” (lat.): Vorrichtung, Leistung

Gauß, Carl Friedrich (1777-1855)
war einer der großen deutschen Mathematiker sowie ein bedeutender Astronom. Er begründete z.B. in seinem Werk “Disquisitiones arithmeticae” die moderne Zahlentheorie. Da Gauß selbst nichts zu publizieren pflegte,was ihm unvollkommen erschien, wurden große Teile seines mathematischen Wirkens erst nach seinem Tode, nämlich aus seinem Nachlaß bekannt, so z.B. seine Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie.

Geometrie
“ge”, (gr.): Erde
“metrein” (gr.): messen
Die Geometrie ist die Lehre von der Erdmessung bzw. Landmessung

giga
“gigas” (gr.): Riese, das Millardenfache
Abkürzung: “G”

hekta
hektaton (gr.): hundert, das Hundertfache
Abkürzung: “ha”

Heron von Alexandria
lebte wahrscheinlich im 1.Jh. n.Chr. Er war ein griechischer Mathematiker und Physiker.

Hypotenuse
“hypoteino” (gr.): Ich spanne darunter (nämlich die Saiten der Harfe, die bei den Griechen ein rechtwinkliges Dreieck darstellte).

imaginäre Zahl
“imaginatio” (lat.): Einbildung, Trugbild
Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hat sehr grundlegende Studien zu den imaginären Zahlen durchgeführt.

interpolieren
“interpolare” (lat.): einschieben, zwischenschalten

irrationale Zahl
“irrational” (lat.): unberechenbar, verstandesmäßig nicht faßbar
Eine irrationale Zahl ist nicht durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrückbar. Typische irrationale Zahlen sind die Kreiszahl □ oder die Eulersche Zahl e.

Isometrie
“isos” (gr.): gleich
“metrein” (gr.): messen

© Kumitz/Voß

Isometrie = Längengleichheit

Kathete
“káthetos” (gr.): die Herabgelassene, das Lot

Kegel
“Konus” (gr.): Zapfen, Kegel
konisch = kegelförmig

kilo
“chilioi” (gr.): tausend, das Tausendfache
Abkkürzung “k”

Koeffizient
“coeffisere” (lat.): mit ausmachen
Koeffizient = mitwirkende Zahl

Komplementwinkel
“complére” (lat.): anfüllen

Konstante
“constans” (lat.): feststehend, unveränderlich

Koordinate
“coordinare” (lat.): zusammenstellen
Koordinaten = zugeordnete Strecken
Die Bestimmung von Punkten einer Fläche durch Koordinaten wurde erstmalig durch den französichen Mathematiker und Philosophen René Descartes (1596-1650) in die Mathematik eingeführt.

Kotangens
Der Name ist durch eine Zusammenziehung der lateinischen Wörter “complementi” und “tangens” entstanden.

Kubus
“cubus” (lat.): Würfel

Limes
“limes” (lat.): Grenze

linear
“linea” (lat.): Gerade

Logarithmus
“logos” (gr.): Vernunft, Verhältnis
“arithmos” (gr.): Zahl
Die Erfindung der Logarithmen geschah unabhänging voneinander durch den Briten Lord John Napier (1550-1617) sowie dem Schweizer Henry Briggs (1561-1632).

Mantisse
“mantissa” (lat.): Zugabe

Mathematik
Dergroße Pythagoras teilte seine Zuhörer gewöhnlich in zwei Kategorien ein: die “Mathematiker” waren jene, die das Recht hatten, Wissen (mathematha) zu erwerben, während die andere Gruppe (Akusmatiker) nur zuhören durften.

mega
“mega” (gr.): groß, das Millionenfache
Abkürzung: “M”

mikro
“mikros” (gr.): klein, das Millionstel
Abkürzung: “m”

milli
“mille” (lat.): tausend, das Tausendstel
Abkürzung: “m”

Minuend
“minuere” (lat.): vermindern

Multiplikand
“numerus multiplicandus” (lat.): die zu vervielfachende Zahl

Multiplikator
“multiplicare” (lat.): vervielfachen

nano
“nanus” (lat.): Zwerg, das Millionstel
Abkürzung: “n”

Numerus
“numerus” (lat.): Nummer (Zahl)

Ordinate
“ordinare” (lat.): zuordnen
Ordinate = Aufrechte, Lotrechte entspricht der y-Achse

parallel
“parállelos” (gr.): nebeneinanderlaufend, gleichlaufend

per anno
Abk. “p.a.”: für das Jahr
“annus” (lat.): Jahr

Periode
“periodus” (lat.): Umlaufzeit

Perspektive
“perspicere” (lat.): hindurchsehen

Pfund
“£” von “libra” (lat.): Waage, Pfund

pico
“poco” (lat./ital.): spitz, klein, das Milliardstel
Abkürzung: “p”

Potenz
“potentia” (lat.): Macht
Erst nach Einführung der sogenannten allgemeinen Zahlen durch den französischen Mathematiker Francois Vieta (1540-1603) wurde mit Potenzen gerechnet. Die heutige Schreibweise der Potenzen stammt von dem französischen Philosophen und Mathematiker René Descartes (1596-1650).

Primzahl
“primus” (lat.): der erste
Eine Primzahl hat stets eine zweielementige Teilermenge.

Produkt
“productum” (lat.): das Hervorgebrachte, das Ergebnis

projezieren
“projicere” (lat.): vor-, hinwerfen
“projectio” (lat.): Vor-, Hinwerfung

Promille
“pro mille” (lat.): für, von, unter 1000
Abkürzung: “‰”

proportional
“proportio” (lat.): Ebenmaß

Prozent
“pro centum” (lat.): für, von, unter 100
Abkürzung: “%”
Pythagoras von Samos (570-497 v.Chr)
war ein griechscher Philosoph, der in Kroton (Unteritalien) den Bund der Pythagoreer mit religiösen, wissenschaftlichen, politischen und ethischen Zielen gründete. Seine nur mündlich vorgetragenen Lehrmeinungen umfaßten u.a. mystisch priesterliche Weisheit. Die Entdeckung bestimmter rationaler Zahlenverhältnisse in der Natur führte Pythagoras zu der Lehre, daß das Wesen der Wirklichkeit die Zahl sei. Die Aussage des ihm zugeschriebenen

© Kumitz/Voß

“Satz des Pythagoras” war für Einzelfälle schon vor seiner Zeit bekannt.

Quotient
“quotiens” (lat.): wie oft

radizieren
“radix” (lat.): Wurzel

rationale Zahl
“ratio” (lat.): Verhältnis

real
(lat.): wirklich, wahrhaft

Riese, Adam (1492-1559)
war ein sog. “Rechenmeister” in Erfurt und später in Annaberg. Er schrieb mehrere Rechenbücher, die bis in die Mitte des 17. Jahrhunderts benutzt wurden. Sein bekanntestes Werk ist “Rechnung auff der linihen vnd federn”. Zum Verständnis muß erwähnt werden, daß bis in die Mitte des 16. Jahrhunderts in Deutschland üblicherweise mit römischen Ziffern gerechnet wurde. Adam Riese machte sich um die Einführung des Rechnens mit arabischen Ziffern verdient.

Stereometrie
“stereos” (gr.): starr, fest
“metrein” (gr.): messen
Stereometrie = Körpermessung, Körperlehre

Subtrahend
“subtrahere” (lat.): abziehen

Supplementwinkel
“supplere” (lat.): ergänzen

Symmetrie
“symmetriá” (gr.): Ebenmaß, Gleichmaß

Sinus
(lat.): Hohlraum, Ausbuchtung, der Bausch im Gewand

Tangente
“tangere” (lat.): berühren

tera
“teras” (Gr.): Ungeheuer, das Billionenfache
Abkürzung: “T”

Thales von Milet (um 650-560 v.Chr.)
war ein grischer Philosoph. Er zählte zu den sog. “7 Weisen” des alten Grenlands.

Trigonometrie
“trigonon” (gr.): Dreieck
“metrein” (gr.): messen
Trigonometrie = Dreiecksmessung (d.h. Bestimmung von Dreiecksparametern mit Hilfe der Winkel- und Seitenverhältnisse)

Vektor
“vector” (lat.): Fahrer

Zeit
“tempus” (lat.): die Zeit
Abkürzung: “t”

zenti
“centum” (lat.): hundert, das Hundertstel
Abkürzung: “c”

Zins
“census” (lat.): Schätzung, Zensur
Abkürzung: “z”

Zyklus
“kyklos” (gr.): Kreis

© Kumitz/Voß