1 Funktionen

1.1 Funktionsbegriff

1.1.1 Definition

Es seien X,Y nichtleere Mengen. Eine Vorschrift f mit der Eigenschaft

$$\boxed{\forall x \in X \exists!\, y \in Y: y = f(x)}$$

heiße Abbildung (oder Funktion oder Zuordnung) von X in Y.
Das Element y = f(x) heiße Bild von x unter f, und x heiße ein Urbild von f(x).
Die Menge X heißt Definitionsbereich der Funktion f, häufig mit D(f) bezeichnet. Die Menge Y heißt Zielmenge von f. Die Menge f(X) heiße Bildbereich oder Wertebereich von f, kurz *Bild f.*

1.1.2 Grundfunktionen

(a) **Die ganzrationale Funktion:**

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ \forall x \in \mathbf{R}, \ \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \ fest. D(f) = \mathbf{R}.$$

Für $a_n \neq 0$ ist $f(x) = P_n(x)$ ein Polynom vom Grade n.

Sonderfälle:

- *konstante Funktion*
  f(x) := b.
- *lineare Funktion*
  f(x) := ax.
- affine Funktion
  f(x) := ax + b.

(b) **Die gebrochen rationale Funktion**

$$\boxed{f(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \text{ und } b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbf{R} \text{ fest}, \ \ D(f) := \{x \in \mathbf{R} : Q_m(x) \neq 0\}.}$$

(c) **Die *n*-te Wurzelfunktion**

$$\boxed{f(x) := \sqrt[n]{x}, \ D(f) := \mathbf{R}_0^+, \ n \in \mathbf{N} \text{ fest.}}$$

(d) **Der Absolutbetrag**

$$\boxed{f(x) := |x|, \ D(f) := \mathbf{R}, \ Bild\, f = [0; +\infty].}$$

(e) **Die Signumsfunktion**

$$\boxed{f(x) := sign\ x = \begin{cases} +1 & : x > 0, \\ \pm 0 & : x = 0, \\ -1 & : x < 0 \end{cases} \quad mit\ D(f) = \mathbf{R}, \quad Bild\ f = \{-1;0;1\}.}$$

(f) **Die Entire-Funktion**

$$\boxed{f(x) := [x],\ D(f) = \mathbf{R},\ Bild\ f = \mathbf{Z}\ \left([x]\ ist\ die\ größte\ p \in \mathbf{Z}\ mit\ p \le x\right).}$$

1.1.3 Maximaler Definitionsbereich

Der maximale Definitionsbereich $D_{max}(f) \subseteq \mathbf{R}$ einer Funktion f ist diejenige Menge, die zu jedem ihrer Elemente $x \in D_{max}(f)$ einen formelmäßigen Ausdruck für f(x) zuläßt, während f(x) für $x \notin D_{max}(f)$ nicht definierbar ist.

1.1.4 Vektor- und matrixwertige Funktionen

(a) **Vektorwertige Funktionen:**

Es seien $x_j : \begin{cases} D(x_j) \to \mathbf{R}, \\ t \mapsto x_j(t), \end{cases} \quad j = 1,2,\dots,n,$

Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich $\emptyset \neq D := \bigcap_{j=1}^{n} D(x_j) \subseteq \mathbf{R}.$ Dann ist eine vektorwertige Funktion $\vec{x} : D \to \mathbf{R}^n$ durch folgende Vorschrift erklärt:

$$\boxed{\vec{x}(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \forall t \in D\ mit\ D(\vec{x}) = D,\ Bild\ \vec{x} \subseteq \mathbf{R}^n.}$$

(b) **Matrixwertige Funktionen:**

Es seien $a_{jk} : \begin{cases} D(a_{jk}) \to \mathbf{R}, \\ t \mapsto a_{jk}(t), \end{cases} \quad j = 1,2,\dots,m,\ k = 1,2,\dots,n,$

Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich $\emptyset \neq D := \bigcap_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} D(a_{jk}) \subseteq \mathbf{R}.$ Dann ist eine matrixwertige Funktion $A : D \to \mathbf{R}^{(m,n)}$ durch folgende Vorschrift erklärt:

$$\boxed{A(t) := \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix} \forall t \in D\ mit\ D(A) = D,\ Bild\ A \subseteq \mathbf{R}^{(m,n)}.}$$

1.1.5 Grundoperationen auf Funktionen

(a) **Nullstellen:**
Eine Zahl $x_0 \in D(f)$ heißt Nullstelle von f, wenn gilt: $f(x_0) = 0$.

(b) **Summe:**
$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$.

(c) **Skalares Vielfaches:**
$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$.

(d) **Produkt:**
$(fg)(x) := f(x)g(x)$.

(e) **Quotient:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \notin \{x_0 : g(x_0) = 0\}.$$

(f) **Betrag:**
$|f|(x) := |f(x)|$.

<u>*Nur in* **R**:</u>

(g) **Positiver Teil:**

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & : f(x) \geq 0, \\ 0 & : f(x) < 0. \end{cases}$$

(h) **Negativer Teil:**

$$f^-(x) := \begin{cases} 0 & : f(x) \geq 0, \\ -f(x) & : f(x) < 0. \end{cases}$$

(i) **Maximum:**
$(\max\{f,g\})(x) := \max\{f(x),g(x)\}$.

(j) **Minimum:**
$(\min\{f,g\})(x) := \min\{f(x),g(x)\}$.

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\boxed{f = f^+ - f^-, \ |f| = f^+ + f^-, \ f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f);}$$

$$\boxed{\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \ \min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).}$$

1.2 Grenzwerte

<u>Anmerkung</u>: *Im Folgenden gilt nicht notwendigerweise, daß $x_0 \in D(f)$.*

1.2.1 Eigentliche Grenzwerte

(a) **Linksseitiger Grenzwert:**

$$\boxed{\lim_{x\to x_0+} f(x) = g^+ \iff \forall\varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left|f(x) - g^+\right| < \varepsilon \ \ \forall x \in D(f), x_0 < x < x_0 + \delta}$$

(b) **Rechtsseitiger Grenzwert:**

$$\boxed{\lim_{x\to x_0-} f(x) = g^- \iff \forall\varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left|f(x) - g^-\right| < \varepsilon \ \ \forall x \in D(f), x_0 > x > x_0 - \delta}$$

(c) **Grenzwert:**

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = g \iff \forall\varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left|f(x) - g\right| < \varepsilon \ \ \forall x \in D(f), 0 < \left|x - x_0\right| < \delta}$$

(d) **Sprünge:**

Existieren im Punkt $x_0 \in \mathbf{R}$ voneinander verschiedene rechts- und linksseitige Grenzwerte $\lim_{x\to x_0\pm} f(x) = g^{\pm}$, so hat die Funktion f bei x_0 einen Sprung der Höhe $|g^+ - g^-|$.

(e) **Singularitäten:**

Ein Punkt $x_0 \in \mathbf{R}$ heißt Unbestimmtheitsstelle oder singuläre Stelle oder Singularität von f, wenn wenigstens einer der Grenzwerte g^+ oder g^- nicht existiert. Singularitäten treten bei rationalen Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in den Nullstellen des Nennerpolynoms Q(x) auf, sofern diese nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählerpolynoms P(x) mindestens derselben Ordnung sind.

(f) **Algebraische Operationen:**

Seien $F := \lim_{x\to x_0} f(x),\ G := \lim_{x\to x_0} g(x);$ Dann gelten die folgenden Regeln:

(I) $\boxed{\lim_{x\to x_0}\left[\alpha f(x)\right] = \alpha F}$

(II) $\boxed{\lim_{x\to x_0}\left[f(x) + g(x)\right] = F + G}$

(III) $\boxed{\lim_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right] = FG}$

(IV) $\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G},\ falls\ G \neq 0}$

(g) **Ordnungsrelationen:**

(I) $\boxed{f(x) < M\ \forall x \in D(f) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \le M}$

(II) $\boxed{f(x) \le g(x)\ \forall x \in D(f) \cap D(g) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)}$

(III) Einschließungskriterium:

$$\boxed{f(x) \le g(x) \le h(x) \wedge \lim_{x \to x_0} f(x) = g = \lim_{x \to x_0} h(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = g}$$

1.2.2 Uneigentliche Grenzwerte

Definition:

(a) Die Funktion f hat in +∞ (bzw. in -∞) den Grenzwert g, wenn gilt:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left| f(x) - g \right| < \varepsilon \; \forall x > \delta \; (bzw. \; \mathrm{x} < \text{-}\delta)}$$

Schreibweise: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = g$.

(b) Die Funktion f hat in $x_0 \in \mathbf{R}$ den uneigentlichen Grenzwert +∞ (bzw. -∞), wenn gilt:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \left(bzw. \; f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \right) \; \forall x \in D(f), 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta}$$

Schreibweise: $\lim_{x \to x_0 (\pm)} f(x) = \pm\infty$

Rechenregeln:

Seien lim f(x) = +∞ = lim h(x), lim g(x) = g

	Limes-Regel	**Formale Regel**
(1)	$\lim\left[f(x) + \alpha g(x) \right] = +\infty, \alpha \in \mathbf{R}$	$\infty + \mathrm{r} = \infty$, $\mathrm{r} \in \mathbf{R}$
(2)	$\lim\left[f(x) g(x) \right] = +\infty, g > 0$	$\infty * \mathrm{r} = \infty$, $\mathrm{r} > 0$
(3)	$\lim\left[f(x) h(x) \right] = +\infty = \lim\left[f(x) + g(x) \right]$	$\infty + \infty = \infty$
(4)	$\lim \frac{g(x)}{f(x)} = 0$	$\frac{r}{\infty} = 0, \; \mathrm{r} \in \mathbf{R}$
(5)	$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, g > 0$	$\frac{\infty}{r} = \infty, \; \mathrm{r} > 0$