

1 Funktionen**1.1 Funktionsbegriff****1.1.1 Definition**

Es seien X, Y nichtleere Mengen. Eine Vorschrift f mit der Eigenschaft

$$\boxed{\forall x \in X \exists! y \in Y: y = f(x)}$$

heiße Abbildung (oder Funktion oder Zuordnung) von X in Y .

Das Element $y = f(x)$ heiße Bild von x unter f , und x heiße ein Urbild von $f(x)$.

Die Menge X heißt Definitionsbereich der Funktion f , häufig mit $D(f)$ bezeichnet. Die Menge Y heißt Zielmenge von f . Die Menge $f(X)$ heiße Bildbereich oder Wertebereich von f , kurz *Bild* f .

1.1.2 Grundfunktionen

(a) **Die ganzrationale Funktion:**

$$f(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R} \text{ fest. } D(f) = \mathbf{R}.$$

Für $a_n \neq 0$ ist $f(x) = P_n(x)$ ein Polynom vom Grade n .

Sonderfälle:

- *konstante Funktion*
 $f(x) := b.$
- *lineare Funktion*
 $f(x) := ax.$
- *affine Funktion*
 $f(x) := ax + b.$

(b) **Die gebrochen rationale Funktion**

$$\boxed{f(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j}, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R} \text{ und } b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbf{R} \text{ fest, } D(f) := \{x \in \mathbf{R}: Q_m(x) \neq 0\}.$$

(c) **Die n -te Wurzelfunktion**

$$\boxed{f(x) := \sqrt[n]{x}, \quad D(f) := \mathbf{R}_0^+, \quad n \in \mathbf{N} \text{ fest.}}$$

(d) **Der Absolutbetrag**

$$\boxed{f(x) := |x|, \quad D(f) := \mathbf{R}, \quad \text{Bild } f = [0; +\infty].}$$

Mathe II Zusammenfassung**(e) Die Signumsfunktion**

$$f(x) := \text{sign } x = \begin{cases} +1 & : x > 0, \\ \pm 0 & : x = 0, \text{ mit } D(f) = \mathbf{R}, \text{ Bild } f = \{-1; 0; 1\}. \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$$

(f) Die Entire-Funktion

$$f(x) := [x], D(f) = \mathbf{R}, \text{ Bild } f = \mathbf{Z} \left([x] \text{ ist die gr\u00f6\u00dft}e p \in \mathbf{Z} \text{ mit } p \leq x \right).$$

1.1.3 Maximaler Definitionsbereich

Der maximale Definitionsbereich $D_{\max}(f) \subseteq \mathbf{R}$ einer Funktion f ist diejenige Menge, die zu jedem ihrer Elemente $x \in D_{\max}(f)$ einen formelm\u00e4\u00dfigen Ausdruck f\u00fcr $f(x)$ zul\u00e4\u00dft, w\u00e4hrend $f(x)$ f\u00fcr $x \notin D_{\max}(f)$ nicht definierbar ist.

1.1.4 Vektor- und matrixwertige Funktionen**(a) Vektorwertige Funktionen:**

$$\text{Es seien } x_j : \begin{cases} D(x_j) \rightarrow \mathbf{R}, \\ t \mapsto x_j(t), \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich $\emptyset \neq D := \bigcap_{j=1}^n D(x_j) \subseteq \mathbf{R}$. Dann ist eine vektorwertige Funktion $\vec{x}: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ durch folgende Vorschrift erkl\u00e4rt:

$$\vec{x}(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \forall t \in D \text{ mit } D(\vec{x}) = D, \text{ Bild } \vec{x} \subseteq \mathbf{R}^n.$$

(b) Matrixwertige Funktionen:

$$\text{Es seien } a_{jk} : \begin{cases} D(a_{jk}) \rightarrow \mathbf{R}, \\ t \mapsto a_{jk}(t), \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich $\emptyset \neq D := \bigcap_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} D(a_{jk}) \subseteq \mathbf{R}$. Dann ist eine

matrixwertige Funktion $A: D \rightarrow \mathbf{R}^{(m,n)}$ durch folgende Vorschrift erkl\u00e4rt:

$$A(t) := \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \forall t \in D \text{ mit } D(A) = D, \text{ Bild } A \subseteq \mathbf{R}^{(m,n)}.$$

Mathe II Zusammenfassung**1.1.5 Grundoperationen auf Funktionen****(a) Nullstellen:**

Eine Zahl $x_0 \in D(f)$ heißt Nullstelle von f , wenn gilt: $f(x_0) = 0$.

(b) Summe:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

(c) Skalares Vielfaches:

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

(d) Produkt:

$$(fg)(x) := f(x)g(x).$$

(e) Quotient:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \notin \{x_0 : g(x_0) = 0\}.$$

(f) Betrag:

$$|f|(x) := |f(x)|.$$

Nur in \mathbf{R} :

(g) Positiver Teil:

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & : f(x) \geq 0, \\ 0 & : f(x) < 0. \end{cases}$$

(h) Negativer Teil:

$$f^-(x) := \begin{cases} 0 & : f(x) \geq 0, \\ -f(x) & : f(x) < 0. \end{cases}$$

(i) Maximum:

$$(\max\{f, g\})(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$

(j) Minimum:

$$(\min\{f, g\})(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-, \quad f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f);$$

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

1.2 Grenzwerte

Anmerkung: Im Folgenden gilt nicht notwendigerweise, daß $x_0 \in D(f)$.

1.2.1 Eigentliche Grenzwerte**(a) Linksseitiger Grenzwert:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g^+ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - g^+| < \varepsilon \quad \forall x \in D(f), x_0 < x < x_0 + \delta$$

(b) Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g^- \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - g^-| < \varepsilon \quad \forall x \in D(f), x_0 - \delta < x < x_0$$

(c) Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - g| < \varepsilon \quad \forall x \in D(f), 0 < |x - x_0| < \delta$$

(d) Sprünge:

Existieren im Punkt $x_0 \in \mathbf{R}$ voneinander verschiedene rechts- und linksseitige Grenzwerte

$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = g^\pm$, so hat die Funktion f bei x_0 einen Sprung der Höhe $|g^+ - g^-|$.

(e) Singularitäten:

Ein Punkt $x_0 \in \mathbf{R}$ heißt Unbestimmtheitsstelle oder singuläre Stelle oder Singularität von f , wenn wenigstens einer der Grenzwerte g^+ oder g^- nicht existiert. Singularitäten treten bei

rationalen Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in den Nullstellen des Nennerpolynoms $Q(x)$ auf, sofern diese

nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählerpolynoms $P(x)$ mindestens derselben Ordnung sind.

(f) Algebraische Operationen:

Seien $F := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $G := \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$; Dann gelten die folgenden Regeln:

$$(I) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha f(x)] = \alpha F$$

$$(II) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = F + G$$

$$(III) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = FG$$

$$(IV) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}, \text{ falls } G \neq 0$$

(g) Ordnungsrelationen:

$$(I) \quad f(x) < M \quad \forall x \in D(f) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq M$$

$$(II) \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D(f) \cap D(g) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Mathe II Zusammenfassung(III) Einschließungskriterium:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g$$

1.2.2 Uneigentliche Grenzwerte**Definition:**(a) Die Funktion f hat in $+\infty$ (bzw. in $-\infty$) den Grenzwert g , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - g| < \varepsilon \quad \forall x > \delta \text{ (bzw. } x < -\delta)$$

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = g$.(b) Die Funktion f hat in $x_0 \in \mathbf{R}$ den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \left(\text{bzw. } f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad \forall x \in D(f), 0 < |x - x_0| < \delta$$

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} f(x) = \pm\infty$ **Rechenregeln:**Seien $\lim f(x) = +\infty = \lim h(x)$, $\lim g(x) = g$

Limes-Regel	Formale Regel
(1) $\lim [f(x) + \alpha g(x)] = +\infty, \alpha \in \mathbf{R}$	$\infty + r = \infty, r \in \mathbf{R}$
(2) $\lim [f(x)g(x)] = +\infty, g > 0$	$\infty * r = \infty, r > 0$
(3) $\lim [f(x)h(x)] = +\infty = \lim [f(x) + g(x)]$	$\infty + \infty = \infty$
(4) $\lim \frac{g(x)}{f(x)} = 0$	$\frac{r}{\infty} = 0, r \in \mathbf{R}$
(5) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, g > 0$	$\frac{\infty}{r} = \infty, r > 0$