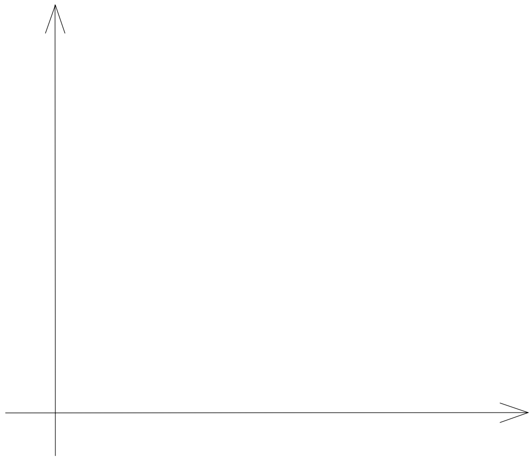
Differenzierbarkeit



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0) \quad (\#)$$

Kettenregel

Beweis:

Ziel ist es, Differenzierbarkeit (s.o.) für f(g(x)) herzuleiten.
Dann erhält man, daß $f \circ g$ diffbar. ist, und man sieht die gesuchte Formel.
Da nach Voraussetzung f und g (auf entsprechenden Definitionsbereichen) diffbar. sind, läßt sich jeweils (#) anwenden.
Nach Einsetzen, Umformen und zusammenfassen erhält man das gewünschte dann.

Also:

- Da g in x_0 diffbar., gilt wegen (#)

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0) \text{ mit } \lim_{x \to x_0} r(x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) = \left[g'(x_0) + r(x)\right] \cdot (x - x_0) \text{ mit } \lim_{x \to x_0} r(x) = 0 \qquad (1)$$

- Da f diffbar gilt für die Stellen $y; b \in D$

$$f(y) = f(b) + f'(b) \cdot (y - b) + k(y) \cdot (y - b) \text{ mit } \lim_{y \to b} k(y) = 0$$

- Da f diffb. in $g(x_0)$, setze $y=g(x)$, $b=g(x_0)$

Damit erhält man dann:

$$f(g(x)) = f(g(x_0) + f'(g(x_0)) \cdot (g(x) - g(x_0)) + k(g(x)) \cdot (g(x) - g(x_0)) \qquad (2)$$

mit $\lim_{x \to x_0} k(g(x)) = 0$

- (1) in (2) einsetzen

<u>Man erhält:</u>

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + \left[f'(g(x_0)) + k(g(x)) \right] \cdot \left[g'(x_0) + r(x) \right] \cdot (x - x_0)$$

Ausmultiplizieren liefert:

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0)) \cdot r(x)(x - x_0) + k(g(x)) \cdot (g'(x_0) + r(x)) \cdot (x - x_0)$$
$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + t(\ldots) \cdot (x - x_0)$$

Diese Funktion f(g(x)) ist diffbar., falls t(...)$\to$0 für $x \to x_0$
(Beweis über Grenzwertsätze)

Nun muß man nur noch umformen:

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + t(\ldots) \cdot (x - x_0) \qquad \Big| - f(g(x_0))$$
$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + t(\ldots) \cdot (x - x_0) \qquad \Big| : (x - x_0)$$
$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{(x - x_0)} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) + t(\ldots) \qquad \Big| \text{lim auf beiden Seiten}$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{(x - x_0)} = \lim \left[f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) + t(\ldots) \right] = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

nach Def. der Ableitung

$(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0))'$ $\qquad t(\ldots) \to 0$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Ist g in x_0 und f in $g(x_0)$ diffbar., so ist $f \circ g$ in x_0 diffbar., und es gilt: $(f \circ g)'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ **[äußere Ableitung mal innere Ableitung]**