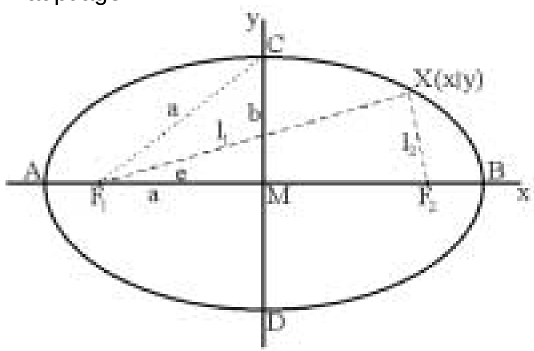
DIE GANZE WAHRHEIT

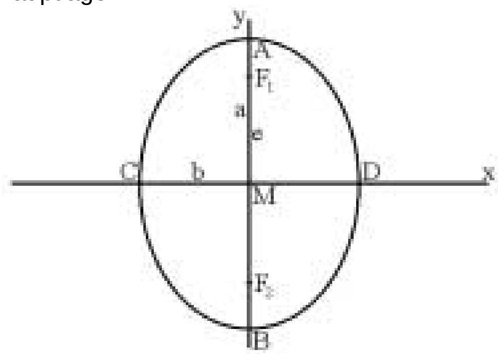
1) Ellipse

▪ Skizze

1. Hauptlage:



2. Hauptlage:



A, B	... Hauptscheitel
$\overline{AB} = 2a$	... Hauptachse
C, D	... Nebenscheitel
$\overline{CD} = 2b$	... Nebenachse
F_1, F_2	... Brennpunkte
$\overline{F_1F_2} = 2e$	
$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e$	... Brennweite,lineare Exzentrizität
l_1, l_2	... Leitstrecken
M (0|0)	... Mittelpunkt

$$\mathbf{a^2 = b^2 + e^2}$$

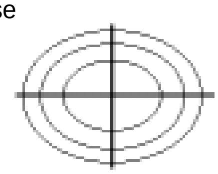
▪ Definition

Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, für die die Summe der Abstände zu 2 festen Punkten, den Brennpunkten, konstant 2a ist.

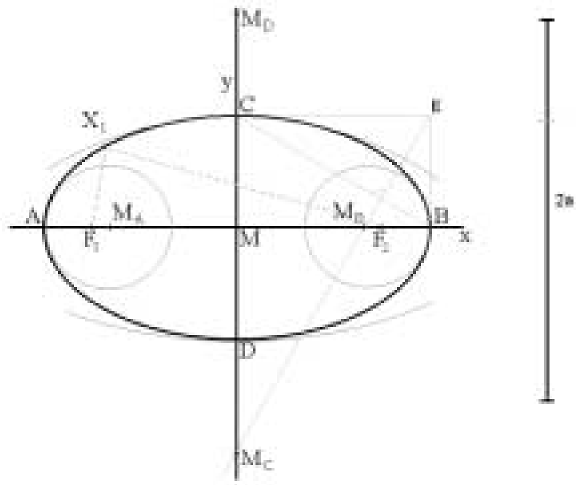
$$ell = \{X \mid \overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a\} = \{X \mid l_1 + l_2 = 2a\}$$

▪ Spezialfälle

a) $a = b \Rightarrow e = 0$; $b = a = r$; $F_1 = F_2 = M$ — Kreis
b) $e = b$ — Gleichseitige Ellipse
c) e konst (selbe Brennpunkte) — Konfokale Ellipse
je größer b, desto größer a



Konstruktion



- Punkte A, B, C, D, M, F_1 und F_2 einzeichnen
- Rechteck MBEC zeichnen
- die Normale auf die Gerade (B,C) durch E zeichnen → M_B und M_C Mittelpunkte der Schmiegekreise, durch Spiegelung M_A und M_D einzeichnen
- neben Ellipse Strecke 2a zeichnen
- mit Zirkel von F_1 Strecke in kritischen Bereich zwischen Schmiegekreisen abschlagen und bei 2a abtragen
- (2a – abgetragener Strecke) von F_2 abschlagen → X_1, Spiegeln
- sooft wiederholen, bis Ellipse zeichenbar

Gleichungen

Gleichung einer Ellipse in 1. Hauptlage:

$$\mathbf{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Gleichung einer Ellipse in 2. Hauptlage:

$$\mathbf{a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ableitung der Gleichung einer Ellipse in 1. Hauptlage

X (x|y) $\quad$ F_1 (-e|0) $\quad$ F_2 (e|0)

$\overline{XF_1} = \sqrt{(-e - x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{e^2 + 2ex + x^2 + y^2}$

$\overline{XF_2} = \sqrt{(e - x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + y^2}$

$\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a$

$\sqrt{e^2 + 2ex + x^2 + y^2} + \sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + y^2} = 2a \quad | -\sqrt{}$

$\sqrt{e^2 + 2ex + x^2 + y^2} = 2a - \sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + y^2} \quad |\ ^2$

$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$

$4ex - 4a^2 = -4a\sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + y^2} \quad | :4$

$ex - a^2 = -a\sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + y^2} \quad |\ ^2$

$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2e^2 - 2a^2ex + a^2x^2 + a^2y^2 \quad | - e^2x^2 - a^2e^2$

$a^4 - a^2e^2 = a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2$

$a^2(a^2 - e^2) = x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2$

$a^2 - e^2 = b^2$

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad | :a^2b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Berührbedingung

geg.: g: $y = kx + d$

Ellipse in 1. Hauptlage: $a^2k^2 + b^2 = d^2$
2. Hauptlage: $b^2k^2 + a^2 = d^2$

Kreis in Ursprungslage: $r^2(1 + k^2) = d^2$ $a^2 = b^2 = r^2$
allgemeiner Lage $r^2(1 + k^2) = (uk - v + d)^2$

Ableitung der Berührbedingung einer Ellipse in 1. Hauptlage

geg.: ell: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
g: $y = kx + d$

$g \cap ell$:

$b^2x^2 + a^2(kx + d)^2 = a^2b^2$
$b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2a^2dkx + a^2d^2 = a^2b^2$
$x^2(b^2 + a^2k^2) + x(2a^2dk) + a^2d^2 - a^2b^2 = 0$
$(b^2 + a^2k^2)x^2 + (2a^2dk)x + (a^2d^2 - a^2b^2) = 0 \quad | :(b^2 + a^2k^2)$

$$x^2 + 2\cdot\frac{a^2dk}{b^2+a^2k^2}x + \frac{a^2d^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2} = 0$$

$$x_{12} = -\frac{a^2dk}{b^2+a^2k^2} \pm \sqrt{\frac{a^4d^2k^2 - ((a^2d^2-a^2b^2)(b^2+a^2k^2))}{(b^2+a^2k^2)^2}}$$

$$x_{12} = -\frac{a^2dk}{b^2+a^2k^2} \pm \frac{1}{b^2+a^2k^2}\cdot\sqrt{a^4d^2k^2 - a^2b^2d^2 - a^4d^2k^2 + a^2b^4 + a^4b^2k^2}$$

$$x_{12} = -\frac{a^2dk}{b^2+a^2k^2} \pm \frac{ab}{b^2+a^2k^2}\cdot\sqrt{\underbrace{-d^2+b^2+a^2k^2}_{D}}$$

$D = a^2k^2 + b^2 - d^2$

$D > 0$	2 Lösungen	Sekante
$D = 0$	1 Lösung	Tangente
$D < 0$	0 Lösungen	Passante

Tangentengleichung und Polarengleichung

geg.: Ellipse
$T(x_1|y_1) \in ell$ → Tangente t durch T
$P(x_1|y_1) \notin ell$ → Polare p
Die Polare p geht durch die Schnittpunkte T_1 und T_2
(Tangenten durch $P \cap$ Ellipse)

Ellipse in 1. Hauptlage:

$$\mathbf{b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2}$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

Ellipse in 2. Hauptlage:

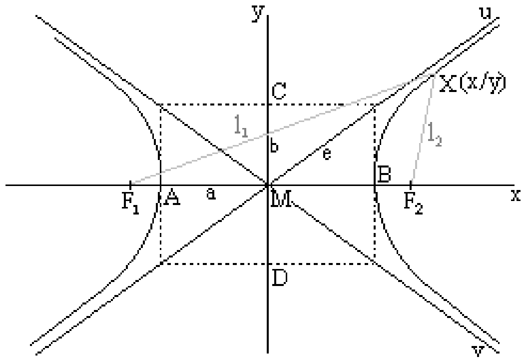
$$\mathbf{a^2xx_1 + b^2yy_1 = a^2b^2}$$

$$\frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2} = 1$$

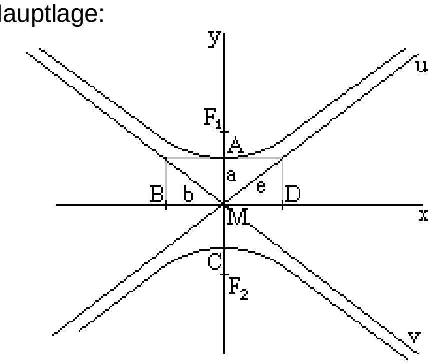
2) Hyperbel

▪ Skizze

1. Hauptlage:



2. Hauptlage:



A, B	... Hauptscheitel
$\overline{AB} = 2a$	... Hauptachse
C, D	... Nebenscheitel
$\overline{CD} = 2b$	... Nebenachse
F_1, F_2	... Brennpunkte
$\overline{F_1F_2} = 2e$	
$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e$	... Brennweite,lineare Exzentrizität
l_1, l_2	... Leitstrecken
M (0|0)	... Mittelpunkt
u, v	... Asymptoten der Hyperbel
M_A, M_B	... Mittelpunkte der Schmiegekreise

$$\mathbf{a^2 + b^2 = e^2}$$

u, v: $y = \pm\frac{a}{b}x$

▪ Definition

Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte, für die die Differenz der Abstände zu 2 festen Punkten, den Brennpunkten, konstant 2a ist.

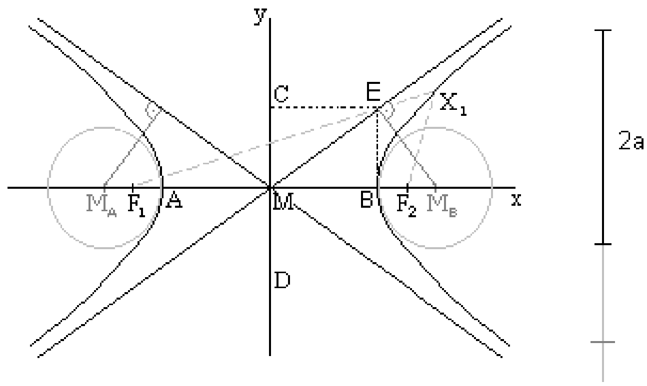
$$hyp = \{X \mid \overline{XF_1} - \overline{XF_2} = 2a\} = \{X \mid |l_1 - l_2| = 2a\}$$

▪ Spezialfälle

a) $a = b \Rightarrow e = a\sqrt{2}$

b) e konst (selbe Brennpunkte) Konfokale Hyperbeln

Konstruktion



- Punkte A, B, C, D, M, F_1 und F_2 einzeichnen
- Rechteck MBEC zeichnen
- Asymptoten einzeichnen
- die Normale auf die Asymtote (M,E) durch E zeichnen → M_B Mittelpunkte des Schmiegekreises des rechten Hyperbelastes, durch Spiegelung M_A einzeichnen
- neben Hyperbel Strecke 2a zeichnen
- mit Zirkel von F_1 Strecke bis außerhalb des Schmiegekreises abschlagen und bei 2a abtragen
- (abgetragener Strecke – 2a) von F_2 abschlagen → X_1, Spiegeln
- sooft wiederholen, bis Hyperbel zeichenbar

Gleichungen

Gleichung einer Hyperbel in 1. Hauptlage:

$$\mathbf{B^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Gleichung einer Hyperbel in 2. Hauptlage:

$$\mathbf{-a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2}$$

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ableitung der Gleichung einer Hyperbel in 1. Hauptlage

X (x|y)

Linker Ast:

$\overline{XF_1} - \overline{XF_2} = -2a$

$\left|\begin{pmatrix}-e-x\\-y\end{pmatrix}\right| - \left|\begin{pmatrix}e-x\\-y\end{pmatrix}\right| = -2a$

$\sqrt{(-e-x)^2+y^2} - \sqrt{(e-x)^2+y^2} = -2a$

$\sqrt{e^2+2ex+x^2+y^2} = \sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2} - 2a \quad |\,^2$

$e^2+2ex+x^2+y^2 = e^2-2ex+x^2+y^2-4a\sqrt{(e-x)^2+y^2} + 4a^2$

$4ex - 4a^2 = -4a\sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + y^2} \quad |:4 \quad |\,^2$

$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$

rechter Ast:

$\overline{XF_1} - \overline{XF_2} = 2a$

$\left|\begin{pmatrix}-e-x\\-y\end{pmatrix}\right| - \left|\begin{pmatrix}e-x\\-y\end{pmatrix}\right| = 2a$

$\sqrt{(-e-x)^2+y^2} - \sqrt{(e-x)^2+y^2} = 2a$

$\sqrt{e^2+2ex+x^2+y^2} = \sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2} + 2a \quad |\,^2$

$e^2+2ex+x^2+y^2 = e^2-2ex+x^2+y^2+4a\sqrt{(e-x)^2+y^2} + 4a^2$

$4ex - 4a^2 = 4a\sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + y^2} \quad |:4 \quad |\,^2$

$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$

$$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2e^2 - 2a^2ex + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$e^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2e^2 - a^4$$

$$x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$

$$e^2 - a^2 = b^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad |:a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Berührbedingung

geg.: g: $y = kx + d$

Hyperbel in 1. Hauptlage: $d^2 + b^2 - a^2k^2 = 0$
2. Hauptlage: $d^2 - a^2 + b^2k^2 = 0$

Ableitung der Berührbedingung einer Hyperbel in 1. Hauptlage

geg.: hyp: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
g: $y = kx + d$

$g \cap hyp$:

$b^2x^2 - a^2(kx + d)^2 = a^2b^2$
$b^2x^2 - a^2k^2x^2 - 2a^2dkx - a^2d^2 = a^2b^2$
$x^2(b^2 - a^2k^2) - x(2a^2dk) - a^2d^2 - a^2b^2 = 0$
$(b^2 - a^2k^2)x^2 - (2a^2dk)x + (-a^2d^2 - a^2b^2) = 0 \quad | :(b^2 - a^2k^2)$

$$x^2 - 2\cdot\frac{a^2dk}{b^2-a^2k^2}x + \frac{-a^2d^2-a^2b^2}{b^2-a^2k^2} = 0$$

$$x_{12} = \frac{a^2dk}{b^2-a^2k^2} \pm \sqrt{\frac{a^4d^2k^2 - ((-a^2d^2-a^2b^2)(b^2-a^2k^2))}{(b^2-a^2k^2)^2}}$$

$$x_{12} = \frac{a^2dk}{b^2-a^2k^2} \pm \frac{1}{b^2-a^2k^2}\cdot\sqrt{a^4d^2k^2 + a^2b^2d^2 - a^4d^2k^2 + a^2b^4 - a^4b^2k^2}$$

$$x_{12} = \frac{a^2dk}{b^2-a^2k^2} \pm \frac{ab}{b^2-a^2k^2}\cdot\sqrt{\underbrace{d^2+b^2-a^2k^2}_{D}}$$

$D = -a^2k^2 + b^2 + d^2$

$D > 0$	2 Lösungen	Sekante
$D = 0$	1 Lösung	Tangente
$D < 0$	0 Lösungen	Passante

$(b^2 - a^2k^2) \neq 0$

Spezialfall:
$b^2 - a^2k^2 = 0$
$b^2 = a^2k^2$
$k^2 = \frac{a^2}{b^2}$
$k = \pm\frac{a}{b}$

$d = 0$ $\qquad$ $d \neq 0$
$y = \pm\frac{a}{b}x$ $\qquad$ $y = \pm\frac{a}{b} + d$
Asymptote $\qquad$ || Asymptote

Asymptote:
$0x^2 - 0x - a^2b^2 = 0$ f.A.
$L = \{\}$

|| Asymptote:
$0x^2 + ... + a^2b^2 = 0$
$\neq 0$ 1Lös

$\Rightarrow$ Jede Parallele zu einer Asymptote schneidet die Hyperbel genau 1x.

Tangentengleichung und Polarengleichung

geg.: Hyperbel
$T(x_1|y_1) \in hyp$ → Tangente t durch T
$P(x_1|y_1) \notin hyp$ → Polare p

Hyperbel in 1. Hauptlage:
$\mathbf{b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2}$

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

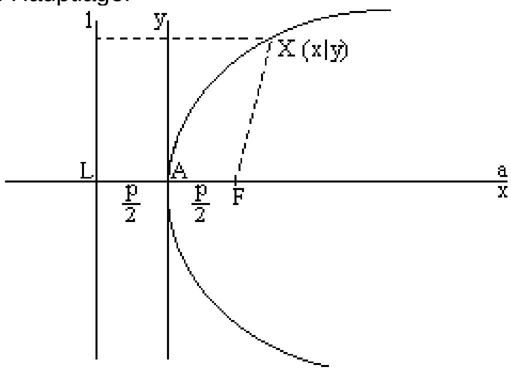
Hyperbel in 2. Hauptlage:
$\mathbf{-a^2xx_1 + b^2yy_1 = a^2b^2}$

$$-\frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2} = 1$$

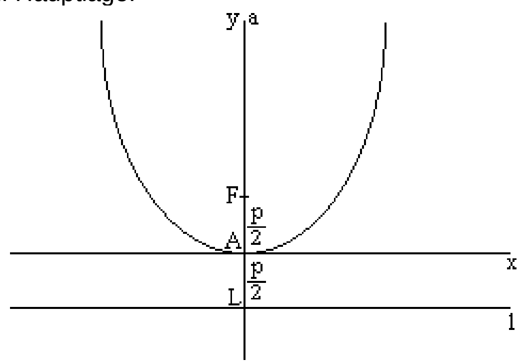
3) Parabel

▪ Skizze

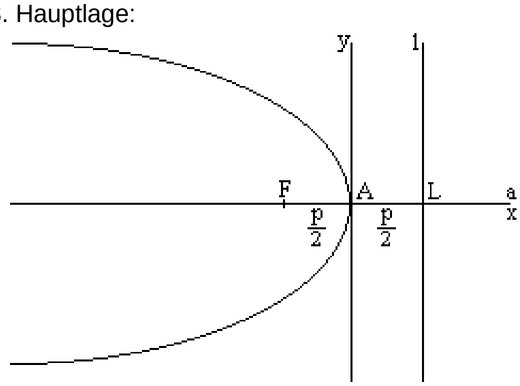
1. Hauptlage:



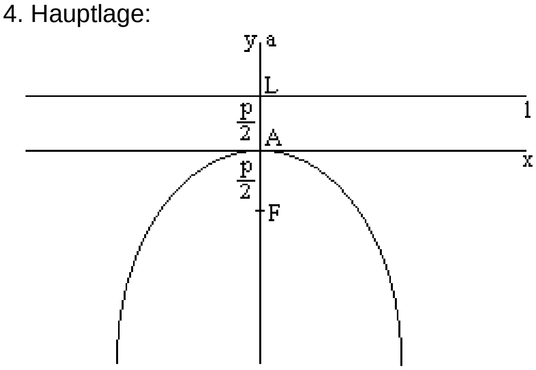
2. Hauptlage:



3. Hauptlage:



4. Hauptlage:



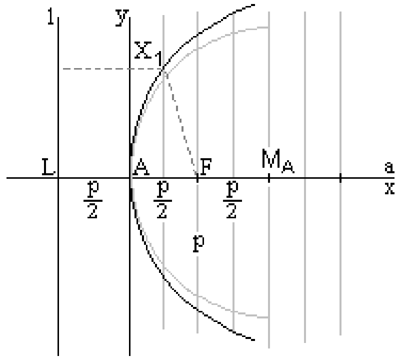
F ... Brennpunkt
A ... Scheitel der Parabel
$\overline{LF}$ = p .... Parameter
l ... Leitlinie
a .... Achse

▪ Definition

Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, für die der Abstand zu einem festen Punkt F, dem Brennpunkt, gleich dem Abstand zur Leitlinie ist.

$$\text{par} = \{X \mid \overline{XF} = \overline{Xl}\}$$

Konstruktion



- Punkte A, F und L einzeichnen
- M_A Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises einzeichnen (Abstand von F $= \frac{p}{2}$)
- Hilfslinien parallel zur Leitlinie einzeichnen
- Strecke von Leitlinie zu einer Hilfslinie in Zirkel nehmen und von F abschlagen
- sooft wiederholen, bis Parabel zeichenbar

Gleichungen

Gleichung einer Parabel in 1. Hauptlage:
$$\mathbf{y^2 = 2px}$$

Gleichung einer Parabel in 2. Hauptlage:
$$\mathbf{x^2 = 2py}$$

Gleichung einer Parabel in 3. Hauptlage:
$$\mathbf{y^2 = -2px}$$

Gleichung einer Parabel in 4. Hauptlage:
$$\mathbf{x^2 = -2py}$$

Gleichung der Leitlinie in 1. Hauptlage:
$$l = -\frac{p}{2}x$$

Gleichung der Leitlinie in 2. Hauptlage:
$$l = -\frac{p}{2}y$$

Gleichung der Leitlinie in 3. Hauptlage:
$$l = \frac{p}{2}x$$

Gleichung der Leitlinie in 4. Hauptlage:
$$l = \frac{p}{2}y$$

Ableitung der Gleichung einer Parabel in 1. Hauptlage

X (x|y)

$$\overline{XF} = \overline{Xl}$$

$$\overrightarrow{FX} = \begin{pmatrix} x-\frac{p}{2} \\ y \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{FX}| = \sqrt{(x - \tfrac{p}{2})^2 + y^2} = d$$

$\overline{Xl}$:

$$\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{1+0}} = 0 \qquad \text{HNF}$$

$$x + \frac{p}{2} = d$$

$$\sqrt{(x - \tfrac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \quad |\,^2$$

$$x^2 - px -+ (\tfrac{p}{2})^2 + y^2 = x^2 + px + (\tfrac{p}{2})^2$$

$$y^2 = 2px$$

Berührbedingung

geg.: g: $y = kx + d$

Parabel in
1. Hauptlage: $p = 2kd$
2. Hauptlage: $k^2p = -2d$
3. Hauptlage: $p = -2kd$
4. Hauptlage: $k^2p = 2d$

Ableitung der Berührbedingung einer Parabel in 1. Hauptlage

geg.: par: $y^2 = 2px$
g: $y = kx + d$

$g \cap$ par:

$k^2x^2 + 2dkx + d^2 = 2px$

$k^2x^2 + (2dk - 2p)x + d^2 = 0 \quad | :k^2 \neq 0$

$$x_{12} = \frac{kd-p}{k^2} \pm \sqrt{\frac{(k^2d^2 - 2kdp + p^2) - k^2d^2}{k^4}}$$

$$x_{12} = \frac{kd-p}{k^2} \pm \frac{1}{k^2}\underbrace{\sqrt{p^2 - 2kdp}}_{D}$$

$D = p^2 - 2kdp$

$p(p - 2kd) = 0$

$p = 2kd$

$D > 0$	2 Lösungen	Sekante
$D = 0$	1 Lösung	Tangente
$D < 0$	0 Lösungen	Passante

$k^2 \neq 0$

Spezialfall:

$k^2 = 0$

$k = 0$

$\Rightarrow y = d \quad$ || x-Achse

$2px = d^2$

$x = \frac{d^2}{2p}$ 1 Lösung

$\Rightarrow$ Jede Parallel zur x-Achse schneidet die Parabel genau 1x.

Tangentengleichung und Polarengleichung

geg.: Hyperbel
$T(x_1|y_1) \in$ hyp → Tangente t durch T
$P(x_1|y_1) \notin$ hyp → Polare p

par: $y^2 = 2px$
$yy = px + px$

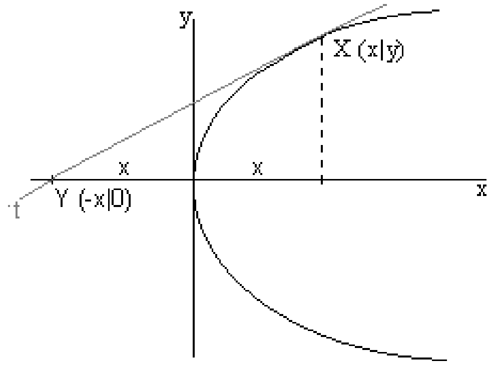
Parabel in 1. Hauptlage:
$\mathbf{yy_1 = p(x + x_1)}$

Parabel in 2. Hauptlage:
$\mathbf{xx_1 = p(y + y_1)}$

Parabel in 3. Hauptlage:
$\mathbf{yy_1 = -p(x + x_1)}$

Parabel in 4. Hauptlage:
$\mathbf{xx_1 = -p(y + y_1)}$

- <u>Konstruktion einer Tangente</u>



4) Komplexe Zahlen

▪ Das Symbol „i"

$x^2 = a$ G = R

a > 0 L = {√a]; -√a}
a = 0 L = {0^(2)}
a < 0 L = {}
⇒ ∃ C ... Menge der komplexen Zahlen

$x^2 = -1$	$x^2 = -4$	$x^2 = -\frac{3}{4}$	$x^2 = -a$ $a \in R^+; a > 0$
$x^2 = (-1)$	$x^2 = 4(-1)$	$x^2 = \frac{3}{4}(-1)$	$x^2 = a(-1)$
$x_{12} = \pm\sqrt{(-1)}$	$x_{12} = \pm 2\sqrt{(-1)}$	$x_{12} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{(-1)}$	$x_{12} = \pm\sqrt{a}\sqrt{(-1)}$
L = {+i ; -i}	L = {2i ; -2i}	L = {¾i ; -¾i}	L = {√a i ; -√a i

Definition: $\boldsymbol{\sqrt{(-1)} = i}$

$i = \sqrt{(-1)}$ | ²
$i^2 = [\sqrt{(-1)}]^2$
$i^2 = -1$

Vorsicht: $[\sqrt{(-1)}]^2 \neq \sqrt{[(-1)^2]}$
$-1 \neq 1$

Quadratische Gleichung:

$ax^2 + bx + c = 0$ a, b, c ∈ R; a ≠ 0 G = C

$$x_{12} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D = b^2 - 4ac$

D > 0 $L = \{-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\}$

D = 0 $L = \{(-\frac{b}{2a})^{(2)}\}$

D < 0

$\sqrt{(b^2 - 4ac)} = \sqrt{(4ac - b^2)}\,\sqrt{(-1)}$
< 0 > 0 i

$L = \{-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\,i; -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\,i\}$

Allgem. Komplexe Zahl:

$$\boldsymbol{z = a + b\,i}$$

a ... Realteil $Re_{(z)}$
b ... Imaginärteil $Im_{(z)}$

$z = Re_{(z)} + Im_{(z)}\,i$

Spezialfälle:

b = 0 ⇒ z = a + 0i = a ... reelle Zahl ∈ R R ⊂ C
a = 0 ⇒ z = 0 + bi = bi ... imaginäre Zahl ∈ C Im ⊂ C

N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R ⊂ C
I

Jede reelle Zahl lässt sich als komplexe Zahl schreiben.

3,9 = 3,9 + 0i $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} + 0i$ $\pi = \pi + 0i$

Gleichheit von komplexen Zahlen:

$z_1 = a + bi$
$z_2 = c + di$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

Koeffizientenvergleich:

Zwei komplexe Zahlen sind gleich,
wenn sowohl ihre Realteile als auch ihre Imaginärteile übereinstimmen.

Rechenregeln

$z_1 = a + bi$ $\qquad$ $z_2 = c + di$

Addition:

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = \underbrace{(a + c)}_{\in R} + \underbrace{(b + d)}_{\in R}i \qquad \in C$$

Subtraktion:

$$z_1 + z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} =$$

$$= \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{Re_{(z)}} + \underbrace{\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}}_{Im_{(z)}} i \qquad \in C$$

$$c^2 + d^2 > 0; \text{ sonst } c = 0, d = 0 \Rightarrow z_2 = 0$$

Potenzen von i:

$i^1 = i$	$i^5 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$
$i^3 = i^2\, i = (-1)\, i = -i$	:
$i^4 = i^2\, i^2 = 1$	:

Konjugiert komplexe Zahlen:

$z = a + bi$
$\bar{z} = a - bi$ $\qquad$ ... konjugiert komplexe Zahl zu z $\qquad$ [z quer]

Eigenschaften von konjugiert komplexen Zahlen:

$\bar{\bar{z}} = z$
$z + \bar{z} = 2a$ $\qquad \in R$
$z - \bar{z} = 2bi$ $\qquad \in Im$
$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ $\qquad \in R$

umgekehrt:

$a^2 + b^2$ $\qquad$ in C zerlegbar, in R nicht!

Satz von VIETA gilt auch für komplexe Zahlen:

$z^2 + pz + q = 0$ $\quad$ $p, q \in C$ $\quad$ mit Lösungen z_1, z_2

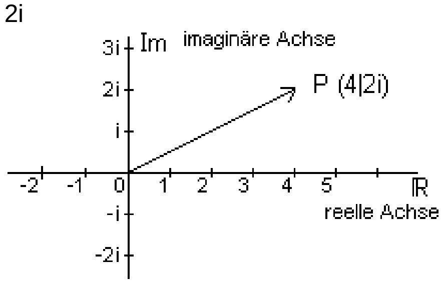
$z_1 + z_2 = -p$
$z_1 \cdot z_2 = q$
$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2)$

Spezialfall:

NUR wenn p UND q $\in R \Rightarrow z_1, z_2$ ... konjugiert komplex

▪ GAUSSsche Zahlenebene

$z = 4 + 2i$

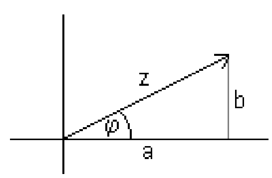


Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig als Punkt (=Ortsvektor) in der GAUSSschen Zahlenebene darstellen.

$|z|$ ... Länge des Vektors
$|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)} = r \in R$ ... Radius der komplexen Zahl = Abstand vom Ursprung (0|0i)
auch $Nm_{(z)} = |z|^2 = a^2 + b^2 = r^2$ $\quad$ [Norm von z]

$$|z|^2 = |z^2|$$

▪ Darstellungsmöglichkeiten



Kartesische Darstellung:

geordnetes Zahlenpaar $\quad$ $(a ; b)$
Binominalform $\quad$ $z = a + bi$

Polarkoordinatendarstellung:

geordnetes Zahlenpaare $\quad$ $(r ; \varphi)$

r ... $|z| \geq 0 \in R_0^+$ $\quad$ Betrag von z
$0° \leq \varphi < 360°$ $\quad$ Argument von z
Hauptwert

Trigonometrische Form $\quad$ $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Zusammenhang:

$r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$
$\tan\varphi = \frac{b}{a}$
$\cos\varphi = \frac{a}{r}$ $\quad$ $a = r \cos\varphi$
$\sin\varphi = \frac{b}{r}$ $\quad$ $b = r \sin\varphi$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen mit Hilfe von Polarkoordinaten:

$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$
$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2\, i + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1\, i) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] = (r1\ r2\ ;\ \varphi_1 + \varphi_2)$$

Beim Multiplizieren von komplexen Zahlen werden die Radien multipliziert
und die Argumente = Winkel addiert.

Division:

$z_1 : z_2 =$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_1(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \cdot \frac{(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} =$$

$$(= \frac{r_1}{r_1} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 - i^2 \sin^2 \varphi_2} - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$= \frac{r_1}{r_1} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2\, i^2}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_1} \cdot [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] =$$

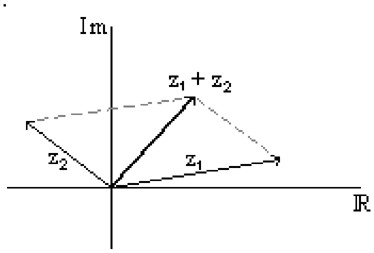
$$= \frac{r_1}{r_1} \cdot [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)] = \left(\frac{r_1}{r_1} ; \varphi_1 - \varphi_2\right)$$

$$z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_1} \cdot [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)] = \left(\frac{r_1}{r_1} ; \varphi_1 - \varphi_2\right)$$

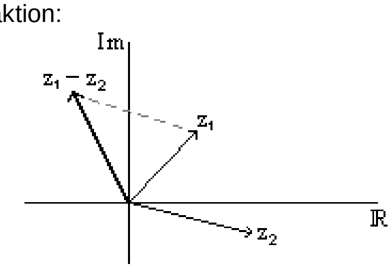
Beim Dividieren von komplexen Zahlen werden die Radien dividiert
und die Argumente = Winkel subtrahiert.

▪ <u>Graphisches Rechnen</u>

Addition:

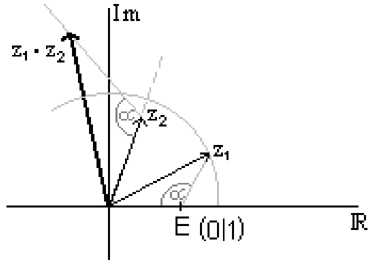


Subtraktion:

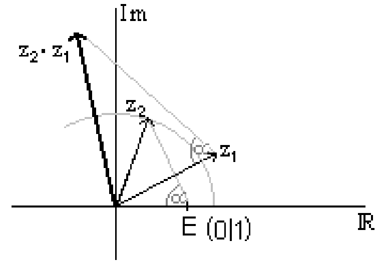


Def.: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

2025
Multiplikation:



Def.: $z_1 \cdot z_2$



Def.: $z_2 \cdot z_1$

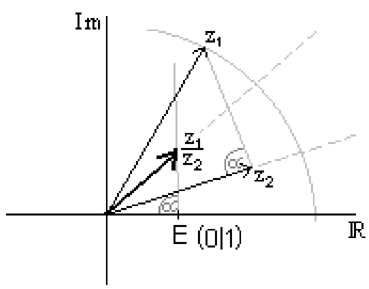
Winkel von z_1 und z_2 addieren
Spitze von z_1 mit Einheitspunkt E verbinden
Winkel α bei Einheitspunkt E bei Spitze von z_2 abtragen

Beweis:

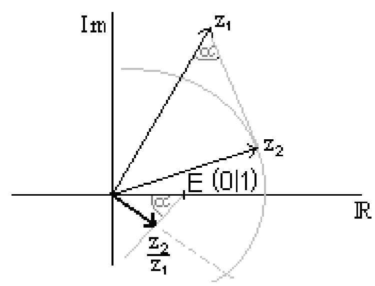
$\Delta 0Ez_1 \approx \Delta 0\, z_2\, z_1z_2$ ... Strahlensatz gilt

$\overline{0E} : \overline{0z_1} = \overline{0z_2} : \overline{0z_1z_2}$
$1 : r_1 = r_2 : r_1r_2$
$r_1r_2 = r_1r_2$ wzbw

Division:



Def.: $z_1 : z_2$



Def.: $z_2 : z_1$

Winkel von z_2 vom Winkel von z_1 subtrahieren
Spitze von z_1 mit Spitze von z_2 verbinden
Winkel α bei Spitze von z_2 bei Einheitspunkt E abtragen

Beweis:

Probe: $z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = z_1$

- <u>Potenzieren</u>

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $n \in R$

$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$
$z^n = r^n[\cos\varphi + \varphi + \varphi + ... + i\sin\varphi + \varphi + \varphi + ...] = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi}$$

Formel von DE MOIVRE

▪ Radizieren (Wurzelziehen)

Definition:

$\zeta \in C$ heißt n-te Wurzel aus $z \in C$ [Zeta]

$\zeta = \sqrt[n]{z}$, wenn $\zeta^n = z$

$n \in N \setminus \{0,1\}$

Beispiel:

$(1 + i)^2 = 2i$

$(-1 - i)^2 = 2i$

$\Rightarrow \sqrt{2i} = \begin{cases} \zeta_1 = (1 + i) \\ \zeta_2 = (-1 - i) \end{cases}$

mit Binomialform:

$\sqrt{[2i]} = a+bi \quad | \,^2$
$2i = a^2 + 2abi + b^2i^2$
$0 + 2i = (a^2 - b^2) + 2abi$ ... Koeffizientenvergleich

$\Rightarrow \quad 0 = a^2 - b^2 \qquad 2 = 2ab$

$1 = ab$

$b = \frac{1}{a}$

$0 = a^2 - \frac{1}{a^2} \quad | \cdot a^2$

$a^4 = 1 \quad | \sqrt{}$

$a^2 = \pm 1$ a muss reell sein! $\Rightarrow$ -1 keine Lösung

$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1$
$a_2 = -1 \qquad b_2 = -1$

$\sqrt{2i} = \begin{matrix} 1 + i \\ -1 - i \end{matrix}$

mit Polarkoordinaten:

geg.: $z = (r ; \varphi) \qquad r \in R^+; \quad 0 \le \varphi < 2\pi$ (Hauptwert)
ges.: $\zeta = \sqrt{z} = (\rho ; \alpha)$

$(\rho ; \alpha) = \sqrt{(r ; \varphi)} \quad | \,^2$
$(\rho ; \alpha)^2 = (r ; \varphi)$
$(\rho^2 ; 2\alpha) = (r ; \varphi)$

$\rho^2 = r \qquad 2\alpha = \varphi \qquad 2\alpha = \varphi + 360°$
$\rho = \sqrt{r} \qquad \alpha = \frac{\varphi}{n} \qquad \alpha = \frac{\varphi}{n} + 180°$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{(r ; \varphi)} = \begin{cases} (\sqrt[n]{r} ; \frac{\varphi}{n}) & \text{... 1. Nebenwert} \\ (\sqrt[n]{r} ; \frac{\varphi}{n} + 1\cdot\frac{360°}{n}) & \text{... 2. Nebenwert} \\ (\sqrt[n]{r} ; \frac{\varphi}{n} + 2\cdot\frac{360°}{n}) & \text{... 3. Nebenwert} \\ (\sqrt[n]{r} ; \frac{\varphi}{n} + (n-1)\cdot\frac{360°}{n}) & \text{... n. Nebenwert} \end{cases}$$

n Lösungen

$$\boldsymbol{(\sqrt[n]{r} ; \frac{\varphi}{n} + (k-1)\cdot\frac{360°}{n}) \qquad k = 1, 2, 3, ..., n}$$

Eine Wurzel aus einer komplexen Zahl ist wieder eine komplexe Zahl.

▪ Exponentialform

$$\mathbf{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}}$$

EULERsche Formel

Beispiel:

$z = r \cdot e^{i\varphi}$
$e^{2\pi i} = 1$
$\cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$
$1 + i \cdot 0 = 1$

$e^{(\pi/2)i} = i$
$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$
$0 + i \cdot 1 = i$

$i^i = (e^{(\pi/2)i})^i = e^{(\pi/2)i^2} = e^{(-\pi/2)} = 1/[e^{(\pi/2)}] = 0{,}207879576351 \quad \in R!$

${}^i\sqrt{i} = (e^{(\pi/2)i})^{(i/2)} = e^{(\pi/2)} = \sqrt{e^\pi} = 4{,}810477381$

$$a = e^{\ln a}$$

Beweis:

$a = e^{\ln a} \quad | \ln$
$\ln a = (\ln a)(\ln e)$
$\ln a = \ln a$

allgem.:

$$\mathbf{a = x^{{}^x\log a}}$$

Beispiel:

$2^i = (e^{\ln 2})^i = \cos \ln 2 + i \sin \ln 2 = \cos 0{,}693147181 + i \sin 0{,}693147181 =$
$= 0{,}769238901 + i\, 0{,}638961276$

Radianten!

5) Komplexe Zahlen als nichtgeordneter Körper

R ist geordnet, da $\forall\, a, b \in R$ gilt: $a < b$ oder
$a = b$ oder
$a > b$

C ist nicht geordnet, da $\forall\, z_1, z_2 \in C$ gilt: $z_1 = z_2$ oder
$z_1 \neq z_2$

Beispiel: i, 2i

„=“
$i = 2i \quad | -i$
$0 = i$
reell nicht reell
$\in R \quad \notin R$ f.A.

„<“
$i < 2i \quad | -i$
$0 < i$
$i > 0 \quad | \cdot(i > 0)$
$i^2 > 0$
$-1 > 0$ f.A. indirekter Beweis

„>“
$i > 2i \quad | -i$
$0 > i$
$i < 0 \quad | \cdot(i < 0)$
$i^2 > 0$
$-1 > 0$ f.A.

$\Rightarrow$ Es ist sinnlos, bei komplexen Zahlen von > oder < zu sprechen; nur = oder ≠ !
$\Rightarrow$ C ist nicht geordnet

C ist ein Körper:

1) (C;+) ... abelsche (=kommutative) Gruppe [C bezüglich plus]

- Abgeschlossenheit
  $z_1 + z_2 = z_3 \quad \in C$
- Assoziativgesetz (AG)
  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- neutrales Element n
  $\forall\, z \in C\ \exists\, n \in C$
  $z + n = n + z = z$
  $n = 0 = 0 + 0i \quad \in C$
- inverses Element z*
  $\forall\, z \in C\ \exists\, z^* \in C$
  $z + z^* = z^* + z = n = 0$
  $z^* = -z \quad \in C$

$\Rightarrow$ Gruppe

- Kommutativgesetz (KG)
  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2) $(C\backslash\{n = 0\}; \cdot)$ ...abelsche Gruppe [C bezüglich mal]

- Abgeschlossenheit
  $z_1 \cdot z_2 = z_3 \qquad z_3 \neq 0$
- Assoziativgesetz (AG)
  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
- neutrales Element n_1
  $\forall z \in C\backslash\{0\} \; \exists n_1 \in C\backslash\{0\}$
  $z \cdot n_1 = n_1 \cdot z = z$
  $n_1 = 1 = 1 + 0i \qquad \in C$
- inverses Element z^*
  $\forall z \in C\backslash\{0\} \; \exists z^* \in C\backslash\{0\}$
  $z \cdot z^* = z^* \cdot z = n_1 = 1$
  $z \cdot z^* = 1 \quad | :z \neq 0$
  $z^* = 1/z = 1/(a + bi)$

$\Rightarrow$ Gruppe

- Kommutativgesetz (KG)
  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

3) Distributivgesetz (DG)
$(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$
$z_1\, (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

ERST wenn 1), 2) und 3) erfüllt sind, spricht man von einem Körper.

$\Rightarrow$ **C ist ein nicht geordneter Körper**

6) Berechne $\sqrt{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})}$ auf 2 verschiedene Arten

Berechne $\sqrt{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})}$ auf zwei Arten und zeige, dass eine Lösung eine dritte Einheitswurzel ist.

Kartesische Darstellung:

$$\sqrt{(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2})} = a + bi \quad |\,^2$$
$$(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = a^2 + 2abi - b^2$$
$$-\tfrac{1}{2} = a^2 - b^2 \qquad -\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2ab$$
$$a = -\frac{\sqrt{3}}{4b}$$
$$-\tfrac{1}{2} = \frac{3}{16b^2} - b^2 \quad | \cdot 16b^2$$
$$-8b^2 = 3 - 16b^4$$
$$16b^4 - 8b^2 - 3 = 0 \qquad b^2 = u$$
$$16u^2 - 8u - 3 = 0$$
$$u_{12} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{32} = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{32} = \frac{8 \pm 16}{32}$$
$$u_1 = 24/32 = \tfrac{3}{4} \qquad b_{12} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad a_{12} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \pm\tfrac{1}{2}$$
$$u_2 = -8/32 = -\tfrac{1}{4} \qquad b_{34} = \pm\frac{i}{2} \notin R$$

$$L = \{\underline{-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i}\,;\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\}$$

Polarkoordinatendarstellung:

$$r = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4})} = \sqrt{1} = 1$$
$$\tan\varphi = \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{2} : (-\tfrac{1}{2}) = \sqrt{3}$$
$$\varphi = \arctan\sqrt{3} = 240°$$

$$\sqrt{(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2})} = \sqrt{[(1;240°)]} = (\sqrt{1};\ 240°/2) = (1;120°) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\sqrt{[(1;240°)]} = (\sqrt{1};\ [240°+360°]/2) = (\sqrt{1};\ 600°/2) = (1;300°) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$L = \{\underline{-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i}\,;\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\}$$

Dritte Einheitswurzel:

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$
$$z_1 = 1$$
$$z^2 + z + 1 = 0$$
$$z_{23} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} - 1)} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(-\tfrac{3}{4})} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$L = \{1\,;\ \underline{-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i}\,;\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\}$$

7) Berechne $9z^2 - 18(1+i)z + 2(16+21i) = 0$

$9z^2 - 18(1 + i)z + 2(16 + 21i) = 0$ G = C

$$z_{12} = \frac{18(1+i) \pm \sqrt{324\,(1+2i-1) - 72\,(16+21i)}}{18} =$$

$$= \frac{18 + 18i \pm \sqrt{648i - 1152 - 1512i}}{18} =$$

$$= \frac{(18 + 18i) \pm \sqrt{-1152 - 864i}}{18} =$$

$$= \frac{(18 + 18i) \pm (12 - 36i)}{18}$$

$$z_1 = \frac{18 + 18i + 12 - 36i}{18} = \frac{30 - 18i}{18} = \frac{5}{3} - i$$

$$z_2 = \frac{18 + 18i - 12 + 36i}{18} = \frac{6 + 54i}{18} = \frac{1}{3} + 3i$$

$\sqrt{(-1152 - 864i)} = \sqrt{[(1440 ; 216{,}87°)]}$

$= (\sqrt{(1440)} ; 216{,}87°/2) =$
$= (37.95 ; 108{,}43°) =$
$= -12 + 36i$

$= (\sqrt{(1440)} ; [216{,}87° + 360°] /2) =$
$= (\sqrt{[1440]}; 576{,}87°/2) =$
$= (37{,}95 ; 288{,}43°) =$
$= 12 - 36i$

L = $\{\frac{5}{3} - i$; ❋ $+ 3i\}$

8) Polinome

▪ Definition

Eine Linearkombination der Form

$$\mathbf{P_{n(x)} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i}$$

(wobei $a_i \in C$ und $a_n \neq 0$) heißt Polynom n-ten Grades über der Menge C in 1 Variable.

n	... Grad des Polynoms
a_i	... Koeffizienten
a_0	... konstantes Glied

Jedes Polynom ist eine zusammenhängende Kurve ($\Rightarrow$ keine Sprungstellen!)

Beispiel:

$4x^2 + 23x - 7$	Polynom 2. Grades über Z
$\sqrt{3}\, x^7 - (4 + 3i)\, x^4 + 2$	Polynom 7. Grades über C
$x^3 + \sqrt{x}$	KEIN Polynom
$2x + \frac{1}{x}$	KEIN Polynom

▪ HORNERsches Verfahren

$P_{3(x)} = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

	a_3	a_2	a_1	a_0
α	a_3	$a_3 \alpha + a_2$	$(a_3 \alpha + a_2) \alpha + a_1$	$[(a_3 \alpha + a_2) \alpha + a_1] \alpha + a_0$

Beweis:

$$\begin{aligned} P_{3(x)} &= a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \\ &= (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1)\, x + a_0 = \\ &= [(a_3 x^3 + a_2 x)\, x + a_1]\, x + a_0 = \end{aligned}$$

Beispiel:

$P_{4(x)} = 5x^4 - x^3 + 3x + 4$ über Z

$P_{4(2)} = 5 \cdot 2^4 - 2^3 + 3 \cdot 2 + 4 = 5 \cdot 16 - 8 + 6 + 4 = 82$

$P_{4(-3)} = 5 \cdot (-3)^4 - (-3)^3 + 3 \cdot (-3) + 4 = 5 \cdot 81 + 27 - 9 + 4 = 427$

	5	-1	0	3	4
2	5	9	18	39	82
-3	5	-16	48	-141	427
i	5	-1 + 5i	-5 - i	4 – 5i	9 + 4i

Beispiel:

$P_{3(z)} = z^3 - 2z^2 + z - 3$

$P_{3(2+i)} = -5 + 4i$

$P_{3(2-i)} = -5 - 4i$

	1	-2	1	-3
(2 + i)	1	i	2i	-5 + 4i
(2 – i)	1	-i	-2i	-5 – 4i

allgemein:

$$P_{(\overline{z})} = \overline{P_{(z)}}, \text{ NUR wenn } a_i \in R!$$

▪ Nullstellen

Polynom

$P_{n(\alpha)} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Polynomfunktion:

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

→ Wertetabelle → Graph ermittelbar

Nullstellen ermitteln:

rechnerisch: Ausdruck gleich Null setzen
graphisch: wo Graph x-Achse schneidet

Eine Zahl $\alpha \in C$ heißt Nullstelle von $P_{n(\alpha)}$, wenn $P_{n(\alpha)} = 0$.

Beispiel:

$P_{4(x)} = 4x^4 - 79x^2 - 20$ ist $2\sqrt{5}$ Nullstelle?

	4	0	-79	0	-20
$2\sqrt{5}$	4	$8\sqrt{5}$	1	$2\sqrt{5}$	0

→ $2\sqrt{5}$ ist Nullstelle

Fundamentalsatz der Algebra von GAUSS:

Jedes Polynom n-ten Grades ($n \in N$) hat mindestens 1 Nullstelle in C.
⇒ Jedes Polynom n-ten Grades hat genau n Nullstellen in C.

4 reelle Nullstellen → Polynom min. (!) 4. Grades

▪ Zerfällen von algebraischen Gleichungen

mit dem Satz von VIETA für Gleichungen höheren Grades

$P_{4(x)} = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_4 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

$L = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$

Beweis:

geg: Polynom n-ten Grades $P_{n(x)} = \underline{1}\, x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$
Voraussetzung: $a_n = 1$ Koeffizient der höchsten Potenz = 1
Nullstellen ermitteln → Polynom wird algebraische Gleichung

Annahme: x_1 ... Lösung von $P_{n(x)}$

$P_{n(x_1)} = \underline{1}\, x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_{n-2} x_1^{n-2} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = 0$

$P_{n(x)} - P_{n(x_1)} = (x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_{n-2}(x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \ldots + a_1 (x - x_1) = 0$

$= (x - x_1)[x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0] = 0$ ... Polynom (n-1)-ten Grades

Annahme: x_2 ... Lösung

$= (x - x_1)(x - x_2)[x^{n-2} + c_{n-3} x^{n-3} + \ldots + c_1 x + c_0] = 0$ ... Polynom (n-2)-ten Grades

⇒ ∃ n Lösungen: $x_1; x_2; \ldots; x_n$

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) = 0$

$$\mathbf{P_{n(x)} = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}$$

$$P_{n(x)} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Satz von VIETA für Gleichungen höheren Grades,
wobei x_1; x_2; x_3; ... Nullstellen (Lösungen) von $P_{n(x)}$ sind.

es gilt:

$-a_{n-1} = x_1 + x_2 + \ldots\ x_n$
$+a_{n-2} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + \ldots x_2 x_n + x_{n-1} x_n$
$-a_{n-3} = x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$
+
-
$(-1)^n a_0 = x_1 x_2 \ldots x_n$

Beispiel:

geg.: $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ G = C
$x_1 = 1$
$x_2 = -2$

$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}{(x - 1)(x + 2)} = (x - x_3)(x - x_4)$$

$(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24) : (x^2 + x - 2) = x^2 + x - 12$ es muss 0 Rest herauskommen

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^4 - x^3 + 2x^2} \\
\quad x^3 - 11x^2 - 14x \\
\quad \underline{-x^3 - x^2 + 2x} \\
\qquad -12x^2 - 12x + 24 \\
\qquad \underline{+ 12x^2 + 12x - 24} \\
\qquad\qquad\qquad 0\ R
\end{array}$$

$x^2 + x - 12 = 0$

$x_{34} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + 12]} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{49}{4})} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$

$x_3 = 3$
$x_4 = -4$

L = {1; -2; 3; -4}

9) Gleichungen höheren Grades

(≥ 3) G = C

▪ Reziproke Gleichungen (Symmetrische Gleichungen)

Eine Gleichung heißt reziprok, wenn zu jeder Lösung α auch $\frac{1}{\alpha}$ Lösung dieser Gleichung ist.
Jede reziproke Gleichung muss auch symmetrisch oder antisymmetrisch sein.

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

symmetrisch: $a_3 = a_0$, $a_2 = a_1$

antisymmetrisch: $a_3 = -a_0$, $a_2 = -a_1$

Beispiel:

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ G = C

$(2x^3 + 2) - (3x^2 + 3x) = 0$

$2 (x^3 + 1) - 3x (x + 1) = 0$

$2 (x + 1) (x^2 - x + 1) - 3x (x + 1) = 0$

$(x + 1) [2 (x^2 - x + 1) - 3x] = 0$

$(x + 1) (2x^2 - 5x + 2) = 0$

x1 = -1 $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

$$x_{23} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$x_2 = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$$

$$x_3 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

L = {-1 ; ½; 2} Lösungen sind reziprok

Reziproke Gleichungen ungeraden Grades haben entweder +1 oder -1 als Lösung.

Beispiel:

$2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$ G = C

$(2x^3 - 2) - (3x^2 - 3x) = 0$

$2 (x^3 - 1) - 3x (x - 1) = 0$

$2 (x - 1) (x^2 + x + 1) - 3x (x - 1) = 0$

$(x - 1) [2 (x^2 + x + 1) - 3x] = 0$

$(x - 1) (2x^2 - x + 2) = 0$

x1 = -1 $2x^2 - x + 2 = 0$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$$x_{23} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - 1} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{15}{16}}$$

$$x_2 = \frac{1}{4} + 0{,}968i$$

$$x_3 = \frac{1}{4} - 0{,}968i$$

L = {1; ¼ + 0,968i; ¼ – 0,968} G = C

L = {1} G = R

▪ Substitution

Beispiel:

$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0 \quad | :x^2 \neq 0 \qquad G = C$

$2x^2 + 5x + 4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

$(2x^2 + \frac{2}{x^2}) + (5x + \frac{5}{x}) + 4 = 0$

$2 (x^2 + \frac{1}{x^2}) + 5 (x + \frac{1}{x}) + 4 = 0$

$x + \frac{1}{x} = u \quad | ^2$ ... Substitution

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = u^2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$

$2 (u^2 - 2) + 5u + 4 = 0$

$2u^2 + 5u = 0$

$u (2u + 5) = 0$

$u_1 = 0$	$u_2 = -\frac{5}{2}$
$x + \frac{1}{x} = 0 \quad | \cdot x$	$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \quad | \cdot x$
$x^2 + 1 = 0$	$x^2 + \frac{5}{2} x + 1 = 0$
$x^2 = -1 \quad | \sqrt{}$	$x_{34} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$
$x_{12} = \pm i$	
$x_1 = i$	$x_3 = -½$
$x_2 = -i$	$x_4 = -2$

$L = \{i; -i; -½ ; -2\}$

Beispiel:

$a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 = 0 \qquad G = C$

$a_4 \neq 0; a_3 = 0; a_1 = 0$

$x^2 = u$ ... Substitution

$a_4 u^2 + a_2 u + a_0 = 0$

▪ Herausheben

$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x = 0$

$a_0 = 0$

$x (a_3 x^2 + a_2 x + a_1) = 0$

▪ Allgemeine Gleichungen 4. Grades mit HORNER

$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad G = C$

$a_4 = 1$

Wenn es ganzzahlige Lösungen gibt,
so kann es sich nur um ein Zahl aus der Teilermenge T_{a_0} handeln.

$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad G = C$

$a_4 \neq 1$

Wenn es rationale Lösungen gibt, müssen sie Kombinationen aus $\frac{T_{a_0}}{T_{a_4}}$ sein.

Beispiel:

$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8 = 0$ G = C

$T_8 = \{\pm1; \pm2; \pm4; \pm8\}$

	1	-6	14	-16	8
2	1	-4	6	-4	0

$x_1 = 2$

$(x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8) : (x - 2) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$
$\underline{-x^4 + 2x^3}$
$-4x^3 + 14x^2$
$\underline{4x^3 - 8x^2}$
$6x^2 - 16x$
$\underline{-6x^2 + 12x}$
$-4x + 8$
$\underline{4x - 8}$
0 R

$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$

$T_4 = \{\pm1; \pm2; \pm4\}$

	1	-4	6	-4
2	1	-2	2	0

$x_2 = 2$

$(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) : (x - 2) = x^2 - 2x + 2$
$\underline{-x^3 + 2x^2}$
$-2x^2 + 6x$
$\underline{2x^2 - 4x}$
$2x - 4$
$\underline{-2x + 4}$
0 R

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$x_{34} = 1 \pm \sqrt{(1 - 2)} = 1 \pm \sqrt{(-1)} = 1 \pm i$

$x_3 = 1 + i$

$x_4 = 1 - i$

$L = \{2^{(2)}; 1 + i; 1 - i\}$

Beispiel:

$2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6 = 0$ G = C

$T = \{\pm ½; \pm1; \pm 3/2; \pm2; \pm3; \pm6\}$

	2	1	-9	16	-6
-3	2	-5	6	-2	0

$x_1 = -3$

$(2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6) : (x + 3) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2$
$\underline{-2x^4 - 6x^3}$
$-5x^3 - 9x^2$
$\underline{5x^3 + 15x^2}$
$6x^2 + 16x$
$\underline{-6x^2 - 18x}$
$-2x - 6$
$\underline{2x + 6}$
0 R

$2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$

$T = \{\pm ½; \pm1; \pm2\}$

	2	-5	6	-2
½	2	-4	4	0

$x_2 = \frac{1}{2}$

$(2x^3 - 5x^2 + 6x - 2) : (x - \frac{1}{2}) = 2x^2 - 4x + 4$
$\underline{-2x^3 + x^2}$
$-4x^2 + 6x$
$\underline{4x^2 - 2x}$
$4x - 2$
$\underline{-4x + 2}$
0 R

$2x^2 - 4x + 4 = 0 \quad | :2$
$x^2 - 2x + 2 = 0$
$x_{34} = 1 \pm \sqrt{(1-2)} = 1 \pm \sqrt{(-1)} = 1 \pm i$
$x_3 = 1 + i$
$x_4 = 1 - i$

$L = \{-3; \frac{1}{2}; 1 + i; 1 - i\}$

▪ CARDANische Formel

Geronimo CARDANO (1501 – 1576)
(Formel entdeckt von Niccolo TARTAGLIA, veröffentlicht von CARDANO)

geg.: $x^3 - rx^2 + sx + t = 0$

durch Substitution $x = y - \frac{r}{3} \Rightarrow y^3 + py + q = 0$

$$y_1 = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \left(\frac{q}{2}\right)} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \left(\frac{q}{2}\right)}$$

Lösung $x_1 = y_1 - \frac{r}{3}$

dann durch $(x - x_1)$ dividieren...

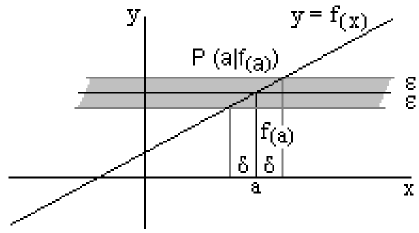
▪ Allgemeine Gleichungen ab 5. Grades

Jede Gleichungen höheren Grades (>4) ist allgemein NICHT lösbar (nur in Spezialfällen).

bewiesen von Emile GALOIS ~1830

10) Funktionen

- ## Stetigkeit



Definition1:

Eine Funktion $y = f_{(x)}$ heißt an der Stelle a stetig,
wenn $\forall\ \varepsilon > 0$ (gelegt um $f_{(a)}$) $\exists\ \delta > 0$ (gelegt um a),
sodass $\forall\ x \in U(a,\delta) \Rightarrow |f_{(a)} - f_{(x)}| < \varepsilon$.

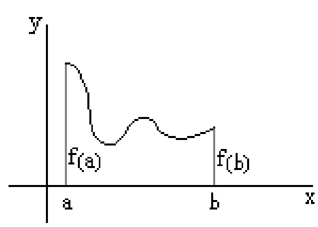
Definition2:

Eine Funktion $y = f_{(x)}$ heißt an der Stelle a stetig,
wenn der linksseitige Grenzwert gleich dem rechtsseitigen Grenzwert Funktionswert ist.

$$\lim_{x = a-0} f_{(x)} = \lim_{x = a+0} f_{(x)} = f_{(a)}$$

Eine stetige Kurve muß eine zusammenhängende Kurve sein.
Funktionen mit Sprungstellen sind nicht stetig!

Zwischenwertsatz:



Ist f eine in einem abgeschlossenem Intervall [a; b] stetige Funktion, und gilt $f_{(a)} \neq f_{(b)}$,
so nimmt die Funktion jeden Wert zwischen $f_{(a)}$ und $f_{(b)}$ mindestens 1x an.

Nullstellensatz:

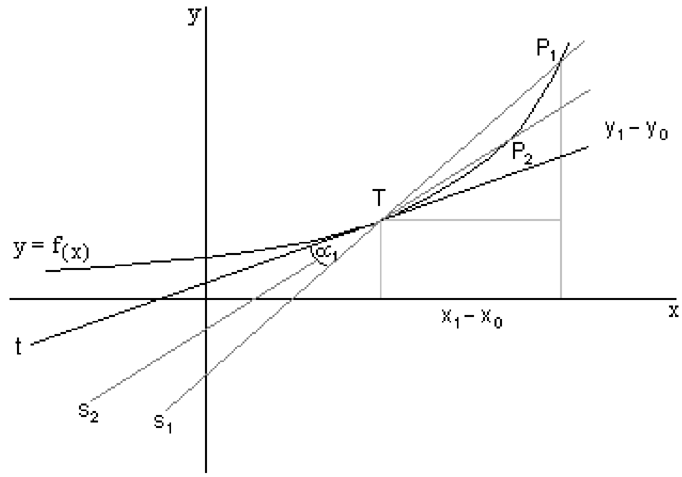
Haben $f_{(a)}$ und $f_{(b)}$ verschiedene Vorzeichen, so besitzt f in]a; b[mindestens 1 Nullstelle.

Pole:

Punkte, wo die Kurve nicht definiert ist.
→ nicht stetig!
z.B.: Asymptoten

▪ Tangentenproblem

geg.: stetige Kurve $y = f_{(x)}$ → keine Sprungstellen
ges.: Anstieg der Tangente in T $(x_0|y_0)$ an die Kurve $f_{(x)}$



Konstruieren einer Sekantenfolge:

$<s_1 (P_1; T); s_2 (P_2; T); s_3 (P_3; T); ...>$

Grenzwert der Sekantenfolge = Tangente t in T $(x_0|y_0)$

$P_1 (x_1\|y_1)$ annehmen	Anstieg von $s_1 (P_1; T) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \tan \alpha_1$
$P_2 (x_2\|y_2)$ annehmen	Anstieg von $s_2 (P_2; T) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \tan \alpha_2$
$P_n (x_n\|y_n)$	Anstieg von $s_n (P_n; T) = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \tan \alpha_n$

$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = k_t$ Anstieg der Tangente im Punkt T $(x_0|y_0)$

$$x_n \to x_0 = n \to \infty$$

Folge $<x_n>$ $(x_n \to x_0)$ wählen:

$$<x_n> = <\frac{(x_0 \cdot n) - 1}{n}>$$

Beispiel:

geg.: par: $y = x^2$
ges:: Anstieg im Punkt T (1|y) an Kurve

T in par: T (1|1)

Folge $<x_n>$ $(x_n \to x_0 = 1) = <\frac{n-1}{n}>$

$\lim_{n \to \infty} <\frac{n-1}{n}> = 1$

$y = x^2$

$y_n = x_n^2 = (\frac{n-1}{n})^2$

$$k_t = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - 1}{\left(\frac{n-1}{n}\right) - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left(\frac{n-1}{n}\right) + 1\right]\left[\left(\frac{n-1}{n}\right) - 1\right]}{\left(\frac{n-1}{n}\right) - 1} =$$

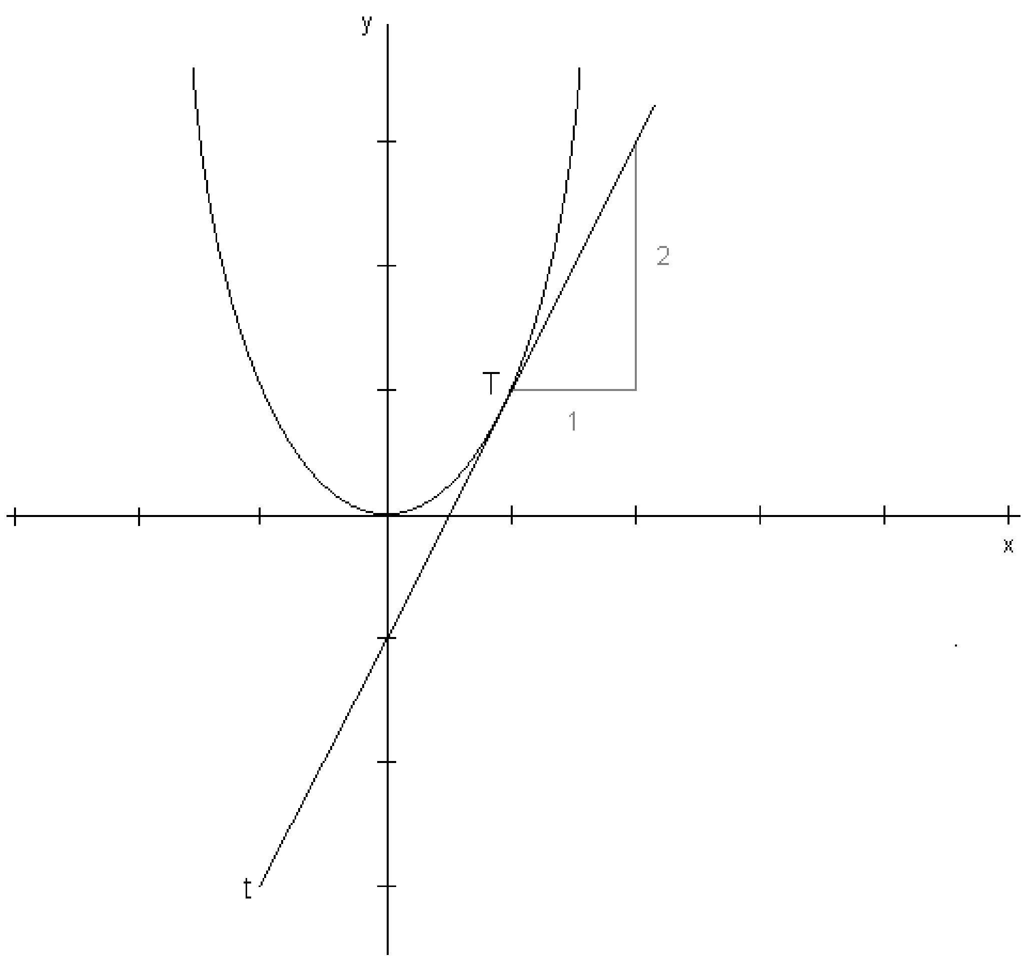
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$$

Grenzübergang

t: $y = kx + d$
$y = 2x + d$

T einsetzen: $1 = 2 + d$
$d = -1$

t im Punkt T: $y = 2x - 1$



11) Differentialrechnung

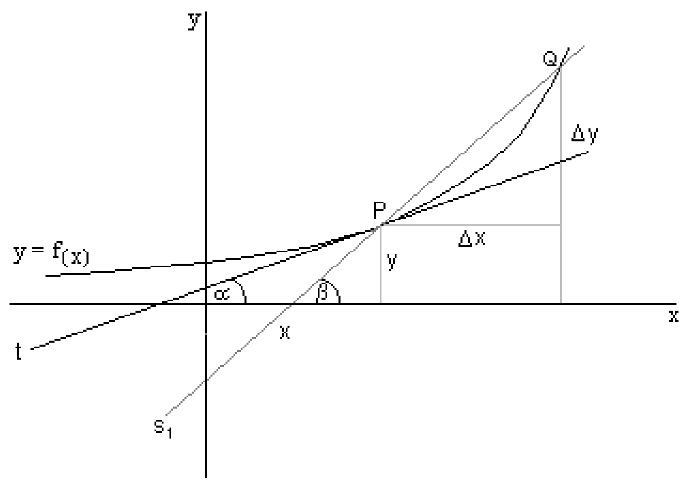
= Infinitesimalrechnung

Unabhängig von einander erarbeiteten
Isaac NEWTON (1643 – 1727) (GB) mit Hilfe der Momentangeschwindigkeit
und
Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 – 1716) (D) mit Hilfe des Tangentenproblems
gleichzeitig die Differentialrechnung.

Aufgabe der Differentialrechnung:
Bestimmung des Anstiegs einer Kurve (=Anstieg der Tangente) in einem beliebigen Kurvenpunkt

▪ Differenzenquotient – Differentialquotient

geg.: $y = f_{(x)}$ ... stetig
$P\ (x|y) \in f$
$Q\ (x + \Delta x|y + \Delta y) \in f$
ges.: t in P



Sekantenfolge $\langle s_1; s_2; s_3; ...\rangle$
$\lim_{n \to \infty} s_n = t$

Unter der Tangente in P versteht man die Grenzlage der Sekanten, wenn Q sich P nähert.
Unter dem Anstieg der Kurve in P versteht man den Anstieg der Tangente in P.

$Q \in f_{(x)}$ $\quad y + \Delta y = f_{(x + \Delta x)}$
$\Delta y = f_{(x + \Delta x)} - y$
$\Delta y = f_{(x + \Delta x)} - f_{(x)}$

Steigung der Sekante $\quad$ s1: $\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}$$

Differenzenquotient
Anstieg der Sekante

$Q \to P \;\Leftrightarrow\; \Delta x \to 0$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \tan\beta = \tan\alpha$

[dy nach dx]

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tan\beta = y' = f'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Differentialquotient
1. Ableitung der Kurve
Anstieg der Tangente

Beispiel:

geg.: par.: $y = x^2$ $\qquad Q \in$ par

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

$y + \Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$

$\Delta y = x^2 - y + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 \qquad x^2 - y = 0$

$\Delta y = \Delta x\,(2x + \Delta x)$

Steigung einer Sekante: $k_{s_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\,(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

Steigung der Tangente: $k_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

bei (1|1) $\quad k_t = 2$

bei $x = -1{,}5$ $\quad$ (-1,25|2,25) $\quad k_t = -3$

mit Hilfe der Differentialrechung:

geg.: f: $y = x^2$

ges.: Anstieg der Kurve

f': $y' = 2x$

[Beweis siehe Nr12, Ableitung einer Potenz, S36]

12) Ableitung einfacher Funktionen

▪ Konstante Funktionen

$y = c$
$y' = 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

▪ Ableitung einer Potenz

$y = x^n \qquad n \in R$
$y' = n \cdot x^{n-1}$

Eine Potenz wird differenziert,
indem man den Potenzexponenten mit der um einen Grad verringerten Potenz multipliziert.

Beweis:
$y = f(x) = x^n \qquad n \in R$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - (x)^n}{\Delta x} =$$

$x + \Delta x = a$
$x = b$
$\Delta x = a - b$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) =$
$= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

in Klammer n Glieder

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}\cdot x + \dots + x^{n-1}]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + \dots + x^{n-1}] =$$

n Glieder

Grenzübergang

$= x^{n-1} + x^{n-2} x + x^{n-3} x^2 + \dots + x^{n-1}] =$
$= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$

▪ Konstanter Faktor

geg.: $y = a \cdot f_{(x)} = g_{(x)}$ $\qquad a \in R$ ... konstanter Faktor

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a f(x+\Delta x) - a f(x)}{\Delta x} = a f'_{(x)}$$

$$\mathbf{y' = a \cdot f'_{(x)}}$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

▪ Ableitung einer Summe bzw Differenz

Addition:
$y = u_{(x)} + v_{(x)} = f_{(x)}$

$y' = u'_{(x)} + v'_{(x)}$

Voraussetzungen:

$$\exists\ u'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$\exists\ v'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Beweis:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'_{(x)} + v'_{(x)}$$

Subtraktion:

$y = u_{(x)} - v_{(x)} = f_{(x)}$

$y' = u'_{(x)} - v'_{(x)}$

Die Ableitung einer Summe (Differenz) = Summe (Differenz) der Ableitungen

▪ Produktregel

$y = u_{(x)} \cdot v_{(x)} = f_{(x)}$

$y' = u'_{(x)} \cdot v_{(x)} + u_{(x)} \cdot v'_{(x)}$

Voraussetzungen:

$$\exists\ u'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$\exists\ v'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Beweis:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

Trick: Addieren und Subtrahieren des Ausdrucks $u_{(x)} \cdot v_{(x+\Delta x)}$ im Nenner

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)] + [u(x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} v_{(x)} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u_{(x)} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} v_{(x)} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u_{(x)} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= v_{(x)} \cdot u'_{(x)} + u_{(x)} \cdot v'_{(x)} = u'_{(x)} \cdot v_{(x)} + u_{(x)} \cdot v'_{(x)}$$

$$(f_1\, f_2\, f_3)' = f_1'\, f_2\, f_3 + f_1\, f_2'\, f_3 + f_1\, f_2\, f_3'$$

▪ Quotientenregel

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} = f_{(x)}$$

$$y' = \frac{u'_{(x)} \cdot v_{(x)} - u_{(x)} \cdot v'_{(x)}}{v^2_{(x)}}$$

Voraussetzungen:

$$\exists\ u'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$\exists\ v'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Beweis:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = f_{(x)} \qquad | \cdot v_{(x)}$$

$$u_{(x)} = f_{(x)} \cdot v_{(x)}$$

$$u'_{(x)} = f'_{(x)} \cdot v_{(x)} + f_{(x)} \cdot v'_{(x)} \qquad | - f_{(x)} \cdot v'_{(x)}$$

$$u'_{(x)} - f_{(x)} \cdot v'_{(x)} = f'_{(x)} \cdot v_{(x)} \qquad | : v_{(x)}$$

$$f'_{(x)} = \frac{u'_{(x)} - f_{(x)} \cdot v'_{(x)}}{v_{(x)}}$$

$$y' = \frac{u'_{(x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \cdot v'_{(x)}}{v_{(x)}}$$

$$y' = \frac{\frac{u'_{(x)}\, v_{(x)} - u_{(x)}\, v'_{(x)}}{v_{(x)}}}{\frac{v_{(x)}}{1}}$$

$$\mathbf{y' = \frac{u'_{(x)} \cdot v_{(x)} - u_{(x)} \cdot v'_{(x)}}{v^2_{(x)}}}$$

Spezialfälle:

$y = \frac{1}{v(x)}$ $\qquad$ $y' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$

$y = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $y' = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $y'' = 2/x^3$ $\qquad$ $y''' = -6/x^4$ $\qquad$ $y^{(IV)} = 24/x^5$

▪ <u>Kettenregel</u>

$y = h_{(x)} = f_{(g_{(x)})} = f_{(z)}$ $\qquad$ wobei $h = f \circ g$ $\qquad$ [Verknüpfung]

$z = g_{(x)}$ ... innere Funktion
$y = f_{(z)}$ ... äußere Funktion

zusammengesetzte Funktion

$\mathbf{y' = f'_{(z)} \cdot g'_{(x)}}$

Ableitung der Kettenregel:

geg.: $\quad y = h_{(x)} = f_{(g_{(x)})} = f_{(z)}$

Voraussetzungen:

$$\exists\ f'_{(z)} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$\exists\ g'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Beweis:

$$g_{(x)} = z$$

$$g_{(x+\Delta x)} = z + \Delta z$$

$$\Delta z = g_{(x+\Delta x)} - z$$

$$\Delta z = g_{(x+\Delta x)} - g_{(x)}$$

$$\Delta x \to 0 \iff \Delta z \to 0$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta x} \cdot \underbrace{\frac{\Delta z}{\Delta z}}_{\text{erweitern}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} =$$

vertauschen der Nenner

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{(\Delta x \to 0) \\ \Delta z \to 0}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta z \to 0)}} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

äußere Funktion · innere Funktion

$$= f'_{(z)} \cdot g'_{(x)}$$

Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion ist gleich
dem Produkt aus der Ableitung der äußeren Funktion und der Ableitung der inneren Funktion.

Beweis der Ableitung einer negativen Potenz (mit Hilfe der Kettenregel):

$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ $\quad m \in R$

$y' = m \cdot x^{-m-1}$

$$y' = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot m x^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} =$$

$$= -m x^{m-1} \cdot x^{-2m} = -m x^{m-1-2m}$$

$$y' = -m x^{-m-1}$$

Beispiel:

$y = (x^2 + 3x + 1)^3$

$y' = \underbrace{3 (x^2 + 3x + 1)^2}_{f'_{(z)}} \underbrace{(2x + 3)}_{g'_{(x)}}$

▪ Höhere Ableitungen einer Funktion

Ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder differenzierbar,
so bezeichnet man $(f')' = f''$ als 2. Ableitung von f.

$(f)' = f'$
$(f')' = f''$
$(f'')' = f'''$
$(f''')' = f^{(IV)}$

allgemein:

$(f^{(n-1)})' = f^{n}$

▪ Implizites Differenzieren

y nach Kettenregel !

Beispiel 250d, Buch 7.Klasse:

$2x + \sqrt{y} = 3$
$\sqrt{y} = 3 - 2x$
$y = 9 - 12x + 4x^2$ | nach x differenzieren!
$y' = 8x - 12$ **explizit**

$2x + \sqrt{y} = 3$
$2 + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = 0$ | $\cdot 2$
$4 + \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot y' = 0$
$y' = -4\sqrt{y}$ **implizit**

Probe:

$y' = -4\sqrt{y}$
$y' = -4(3 - 2x)$ siehe oben
$y' = 8x - 12$

warum?
$y^2 + y^3 = x$ | '
$2y \cdot y' + 3y^2 \cdot y' = 1$
$y' (2y + 3y^2) = 1$
$y' = \frac{1}{2y + 3y^2}$ nur implizit differenzierbar!

13) Bilde die 1. Ableitung von $y = \frac{3x^2+1}{2x\sqrt{7-4x}}$

geg.: $y = \frac{3x^2+1}{2x\sqrt{7-4x}}$

$$y' = \frac{6x \cdot 2x\sqrt{7-4x} - (3x^2+1)\,2\sqrt{7-4x} + 2x \cdot ½\,(7-4x)^{-½}\,(-4)}{(2x\sqrt{7-4x})^2} =$$

$$= \frac{12x^2\sqrt{7-4x} - (3x^2+1)\left[2\sqrt{7-4x} - \frac{4x}{\sqrt{7-4x}}\right]}{4x^2\,(7-4x)} =$$

$$= \frac{12x^2\sqrt{7-4x} - \frac{(3x^2+1)\left[2\,(7-4x) - 4x\right]}{\sqrt{7-4x}}}{4x^2\,(7-4x)} =$$

$$= \frac{\frac{12x^2\,(7-4x) + 36x^3 - 42x^2 + 12x - 14x}{\sqrt{7-4x}}}{4x^2\,(7-4x)} =$$

$$= \frac{-12x^3 + 42x^2 + 12x - 14}{4x^2\,(7-4x)\sqrt{7-4x}} = \frac{-6x^3 + 21x^2 + 6x - 7}{2x^2\,(7-4x)^{\frac{3}{2}}}$$

14)Sätze der Differntialrechnung

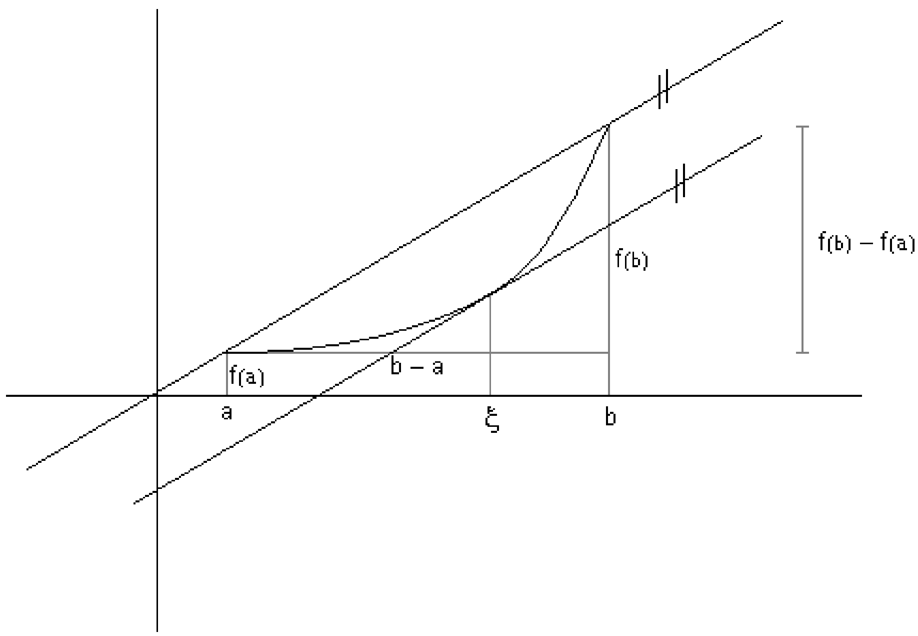
Stetigkeit und Zwischenwertsatz:

[siehe Nr10, Stetigkeit, S31]

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist f in [a;b] stetig und im offenen Intervall]a;b[differnziebar,
so besitzt f in]a;b[mindesten 1 Stelle mit ξ mit $f'_{(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

[Xi]



Satz von ROLLE

Ist f in [a;b] stetig und im offenen Intervall]a;b[differenzierbar,
und gilt $f_{(a)} = f_{(b)}$,
so besitzt f in]a;b[mindestens 1 Stelle ξ mit $f'_{(g)} = 0$

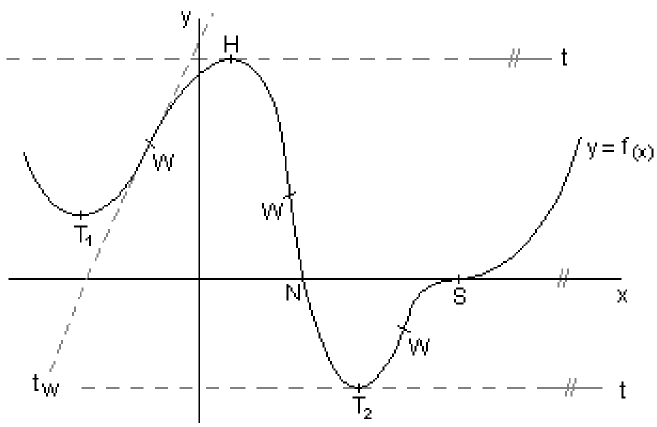
$\Rightarrow$ es gibt in]a;b[mindestens 1 zur x-Achse || Tangente!

Satz von ROLLE ist Spezialfall des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

15) Kurvenduiskussion

...Ermittlung von Eigenschaften einer Funktion, bevor man die Kurve zeichnet

geg.: $y = f_{(x)}$



1) Definitionsmenge, Unstetigkeitsfälle (Lücken, Knicke, Sprünge) D_f
2) Nullstellen, Fixwerte N, F
3) Asymptoten a
4) Extremwerte (Hochpunkte, Tiefpunkte) E (H, T)
5) Wendepunkte W
6) Wendetangenten t_W
7) Monotonie, Krümmung
8) Symmetrieeigenschaften
9) Wertetabelle, Graph

ad 3)

▪ Grenzwerte und Asymptoten

Grenzwerte:

Beispiele:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{(x^2 + x + 3)} = \sqrt{[\lim_{x\to 2} (x^2 + x + 3)]} = \sqrt{9} = 3 \qquad \rightarrow \text{Zahl}$$

$$\lim_{x\to\infty} (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{a_3x^3}_{\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{a_2}{a_3}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty} + \frac{a_1}{a_3}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to\infty} + \frac{a_0}{a_3}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to\infty}\right)}_{\to 1} = \begin{matrix} +\infty \text{, wenn } a_3 > 0 \\ -\infty \text{, wenn } a_3 < 0 \end{matrix}$$

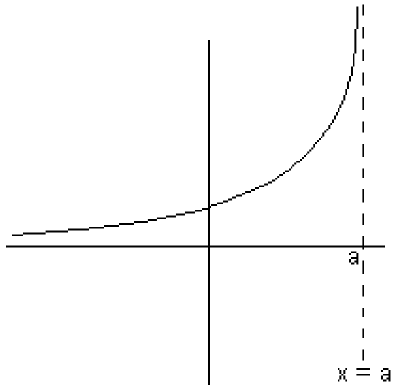
$$\lim_{x\to\infty} (-2x^2 + 25x) = \lim_{x\to\infty} (-2x^2)\left(1 - \frac{25}{2}\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

lim = Zahl $\Rightarrow$ Asymptote

lim = $\pm\infty$ $\Rightarrow$ Polynom hat KEINE Asymptote

Asymptoten:

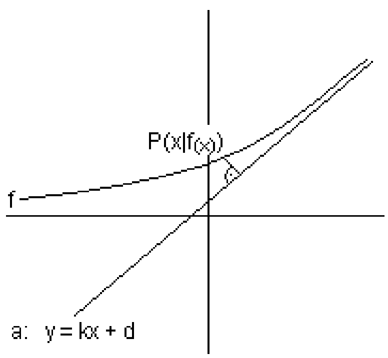
1) || y-Achse



Kurve nähert sich a
x → Zahl

x = a heißt Asymptote von f,
wenn $\lim\limits_{x \to a} f_{(x)} = \pm\infty$

2) ∦ y-Achse



x → ∞

a: y = kx + d heißt Asymptote von f,
wenn $\lim\limits_{x \to \infty} \overline{Pa} = 0$

bzw

$\lim\limits_{x \to \infty} |f_{(x)} - a_{(x)}| = 0$

Berechnung von Asymptoten:

Beispiel:

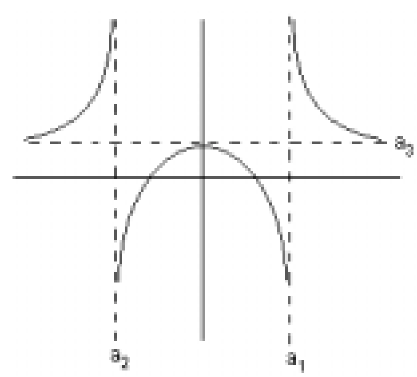
f: $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ D = R \ {± 2} $\frac{P_{n(x)}}{Q_{n(x)}}$ ... rationale Funktion

1) || y-A
D ⇒ a_1: x = 2
a_2: x = -2

2) ∦ y-A

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{\frac{x^2 - 4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 1 - \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

a_3: y = 1



Beispiel:

f: $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ D = R \ {-1}

1) || y-A

D $\Rightarrow$ a_1: x = -1

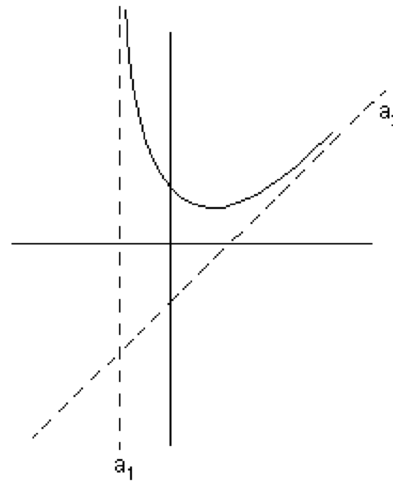
2) $\nparallel$ y-A

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \infty$$

$\Rightarrow$ Polynomdivision:

$(x^2 + 0x + 1) : (x + 1) = x - 1$
$\underline{x^2 + x}$
$-x + 1$
$\underline{-x - 1}$
2 R

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} [(x-1)\cdot\frac{2}{x+1}] = \lim_{x\to\infty} (x-1) = x - 1$$



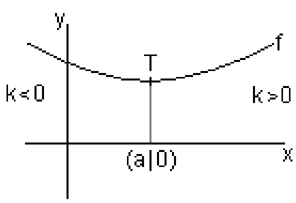
a_2: y = x – 1

ad 4)

▪ Bestimmung der Extremwerte

H Hochpunkt T Tiefpunkt	} E Extremwerte	t durch H t durch T	|| x-Achse	($y' = 0$, $y'' \neq 0$)

y' = 0 setzen $\Rightarrow$ E



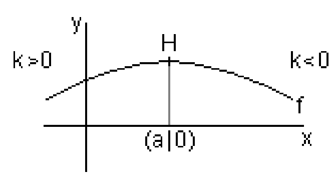
links von T: k<0
→ f' unterhalb x-Achse links

rechts von T: k>0
→ f' oberhalb x-Achse rechts

T $f'_{(a)} = 0$
f' ist in $U_{(a)}$ steigend

→ $f''_{(a)} > 0$

E in f'' > 0 $\Rightarrow$ T



links von H: k>0
→ f' oberhalb x-Achse links

Rechts von H: k<0
→ f' unterhalb x-Achse rechts

H $f'_{(a)} = 0$
f' ist in $U_{(a)}$ fallend

→ $f''_{(a)} < 0$

E in f'' < 0 $\Rightarrow$ H

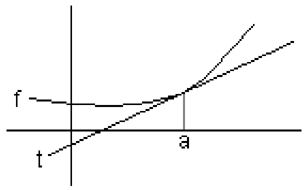
<u>Lokale und absolute Extremwerte:</u>

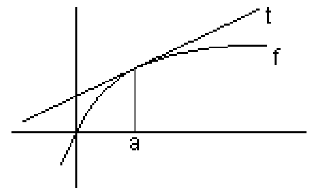
Lokaler Extremwert:	beliebiger Extremwert	T_1
Absoluter Extremwert:	am tiefsten/höchsten gelegener Extremwert	T_2

[Skizze siehe Nr15, S42]

Geometrische Bedeutung der 2. Ableitung:

Krümmung der Kurve





f heißt in $U_{(a)}$ **positiv gekrümmt**,
wenn die Tangente t **unterhalb** der Kurve liegt.

$y''_{(a)} > 0$

f heißt in $U_{(a)}$ **negativ gekrümmt**,
wenn die Tangente t **oberhalb** der Kurve liegt.

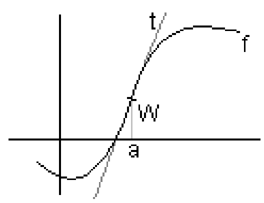
$y''_{(a)} < 0$

ad 5), 6)

Wendepunkte und Wendetangenten

$W(a|f_{(a)})$ heißt Wendepunkt, wenn der Graph von f im Punkt W sein Krümmungsverhalten ändert.
Die Wendetangente durchsetzt die Kurve.

$f''_{(a)} = 0$
$f'''_{(a)} \neq 0$



Spezialfall:

$y' = 0$ und $y'' = 0$ $\Rightarrow$ S Sattelpunkt

[Skizze siehe Nr15, S42]

$y'' = 0$ setzen $\Rightarrow$ W

Wendetangente t_W: $y = kx + d$
$k_{t_W} = f'_{(x_W)}$
d ... W in t_W einsetzen

Bedeutung mehrfacher Werte

$N^{(2)} = E$
$N^{(3)} = E^{(2)} = W$

Beim Differenzieren wird die Vielfachheit eines Punktes um 1 reduziert.

Monotonie, Krümmung

Monotonie:

wichtig: y‘ H T S a || y-A

	$x<x_H$	x_H	$x_H<x<x_S$	x_S	$x_S<x<a$	a || y-A	$a<x<x_T$	x_T	$x_H<x$
y'	> 0	0	< 0	0	< 0	/	< 0	0	> 0

beliebigen Wert im angegebenen Intervall einsetzen:

y‘ > 0 $\Rightarrow$ streng monoton steigend/wachsend str.m.w.
y‘ < 0 $\Rightarrow$ streng monoton fallend str.m.f.

H und T wechseln einander ab
wachsend und fallend müssen einander nicht abwechseln!
(S, a || y-A)

Krümmung:

wichtig: y‘‘ W S

	$x<x_W$	x_W	$x_W<x<x_S$	x_S	$x_S<x$
y‘‘		0		0	

beliebigen Wert im angegebenen Intervall einsetzen:

y‘‘ < 0 $\Rightarrow$ negativ gekrümmt; Tangente verläuft oberhalb von f
y‘‘ = 0 $\Rightarrow$ Tangente durchsetzt f (W, t_W)
y‘‘ > 0 $\Rightarrow$ positiv gekrümmt; Tangente verläuft unterhalb von f

Beispiel 423, Buch 7.Klasse

Der Graph der Funktion f: R→R, y = ax³ + bx² + cx + d hat in 0(0|0) die Steigung 3 und in T(6|0) den Tiefpunkt. Der Graph der Funktion g: R→R, y = px² + qx + r hat seinen Scheitelpunkt S_g an der Stelle 3 und schneidet den Graphen von f in 0 rechtwinkelig. Diskutiere beide Funktionen und fertige eine Zeichnung an!

f: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

f:
$y_{(0)} = 0 \qquad 0 = d$
$y_{(6)} = 0 \qquad 0 = 216a + 36b + 6c + d$
$y'_{(0)} = 3 \qquad 3 = c$
$y'_{(6)} = 0 \qquad 0 = 108a + 12b + c$

$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{12} \quad b = -1 \quad c = 3 \quad d = 0$

f: $y = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$

g: $y = px^2 + qx + r$
$y' = 2px + q$

g:
$y_{(0)} = 0 \qquad 0 = r$
$y'_{(3)} = 0 \qquad 0 = 6p + q$
$y'_{(0)} = -\frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{3} = q$

$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{18} \quad q = -\frac{1}{3} \quad r = 0$

g: $y = \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{3}x$

Kurvendiskussion:

f: $y = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$
$y' = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$
$y'' = \frac{1}{2}x - 2$

1) D — $D_f = R$

2) N, F

$\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x = 0$

$x(\frac{1}{12}x^2 - x + 3) = 0$

$x_1 = 0$ — $N_1(0|0)$

$x_{23} = 6$ — $N_2(6|0)^{(2)}$

$\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x = x$

$x(\frac{1}{12}x^2 - x + 2) = 0$

$x_1 = 0$ — $F_1(0|0) = N_1$

$x_2 = 6 + \sqrt{12}$ — $F_2(6+\sqrt{12}|6+\sqrt{12})$

$x_3 = 6 - \sqrt{12}$ — $F_3(6-\sqrt{12}|6-\sqrt{12})$

3) a — weil Polynom $\Rightarrow$ — $\nexists$ a

4) E

$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$

$x_1 = 6$

$x_2 = 2$

$y''_{(6)} = 1 > 0$ — $T_f(6|0)$

$y''_{(2)} = -1 < 0$ — $H_f(2|\frac{8}{3})$

5) W

$\frac{1}{2}x - 2 = 0$

$x = 4$ — $W_f(4|\frac{4}{3})$

6) t_W: $y = kx + d$

$y'_{(4)} = -1$

$y = -x + d$

W: $\frac{4}{3} = -4 + d$

$d = \frac{16}{3}$

t_W: $y = -x + \frac{16}{3}$

7) Monotonie

	x<2	H x=2	2<x<6	T x=6	x>6
f'	> 0 s.m.w.	0	< 0 s.m.f.	0	> 0 s.m.w.

Krümmung

	x<4	W x=4	x>4
f''	< 0 neg. gekr. t oberhalb	0	> 0 pos. gekr. t unterhalb

8) Symmetrieeigenschaften

g: $y = \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{3}x$
$y' = \frac{1}{9}x - \frac{1}{3}$
$y'' = \frac{1}{9}$

1) D — $D_g = R$

2) N, F

$\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{3}x = 0$

$x(\frac{1}{18}x - \frac{1}{3}) = 0$

$x_1 = 0$ — $N_1(0|0)$

$x_2 = 6$ — $N_2(6|0)$

$\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{3}x = x$

$x(\frac{1}{18}x - \frac{4}{3}) = 0$

$x_1 = 0$ — $F_1(0|0)$

$x_2 = 24$ — $F_2(24|24)$

3) a — weil Polynom $\Rightarrow$ — $\nexists$ a

4) E

$\frac{1}{9}x - \frac{1}{3} = 0$

$x = 3$

$y''_{(3)} = \frac{1}{9} > 0$ — $T_g(3|-\frac{1}{2})$ ... Scheitel

5) W

$\frac{1}{9} = 0$ f.A. $\Rightarrow$ — $\nexists$ W

6) t_W — kein W $\Rightarrow$ — $\nexists$ t_W

7) Monotonie

	x<3	T x=3	x>3
g'	< 0 s.m.f.	0	> 0 s.m.w.

Krümmung

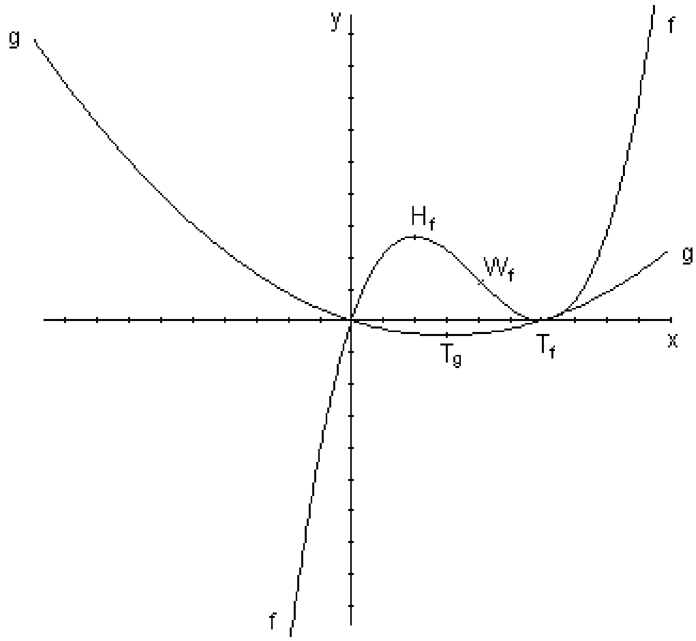
x	$-\infty<x<\infty$
g''	> 0 pos. gekr. t unterhalb

8) Symmetrieeigenschaften

Symmetrieachse || y-A durch Scheitel

x = 3

9) Graph



16) Diskuttiere $\frac{x^3}{(x-1)^2}$

geg.: f: $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

$y = x^3/[(x-1)^2]$

$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[3x^3 - 3x^2 - 2x^3]}{(x-1)^4}$

$y' = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$

$y'' = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)\cdot 3(x-1)^2 \cdot 1}{(x-1)^6} = \frac{(x-1)^2[(3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x) - (3x^3 - 9x^2)]}{(x-1)^2(x-1)^4}$

$y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$

1) D

$(x-1)^2 = 0 \quad | \sqrt{}$
$x - 1 = 0$
$x = 1$

$D_f = R \setminus \{1\}$

2) N, F

$\frac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \quad | \cdot(x-1)^2$
$x^3 = 0$
$x = 0^{(3)}$

$N(0|0)^{(3)} \rightarrow E^{(2)} \rightarrow W$

$\frac{x^3}{(x-1)^2} = x \quad | :x \neq 0 \quad \rightarrow x_1 = 0$ $\quad F_1(0|0) = N$
$x^2 = (x-1)^2$
$x^2 = x^2 - 2x + 1$
$2x = 1$
$x_2 = ½$ $\quad F_2(½|½)$

3) a

|| y-A: $\quad a_1$: $x = 1$

$\nparallel$ y-A: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2}$

Polinomdivision:

$x^3 : (x^2 - 2x + 1) = x + 2$
$\underline{x^3 - 2x^2 + x}$
$2x^2 - x$
$\underline{2x^2 - 4x + 2}$
$3x - 2$ R

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} [(x+2)\frac{3x-2}{(x-1)^2}] = \lim\limits_{x\to\infty} (2+x)$ $\quad a_2$: $y = 2 + x$

4) E

$y' = 0$
$\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0 \quad | \cdot(x-1)^3$
$x^3 - 3x^2 = 0$
$x^2(x-3) = 0$
$x_{12} = 0^{(2)}$
$x_3 = 3$
$y''_{(0)} = 0$ $\quad S(0|0)^{(2)} = N = F_1$
$y''_{(3)} = {}^9/_8 > 0$ $\quad T(3|{}^{27}/_4) = (3|6¾)$

5) W

$y'' = 0$
$\frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \quad | \cdot(x-1)^4$
$6x = 0$
$x = 0$ $\quad W(0|0) = S = N = F_1$

6) t_W

t_W: $y = kx + d$
$y'_{(0)} = 0$
$y = d$
W: $y = 0$

t_W: $y = 0$

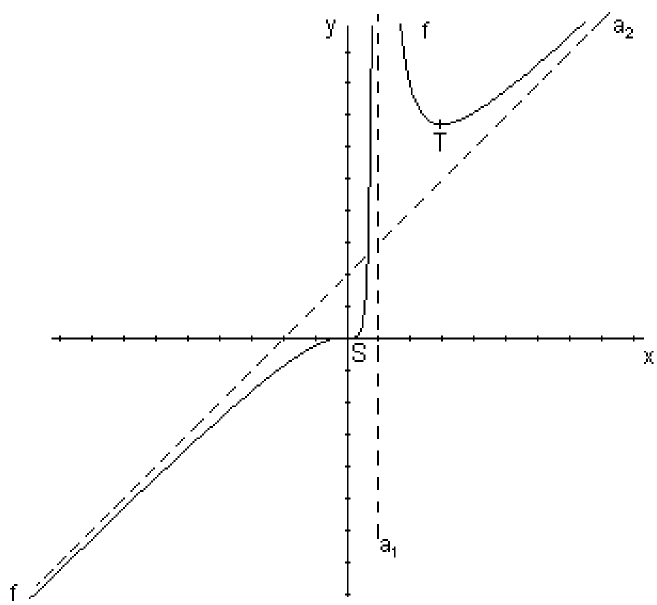
7) Monotonie

		S		a		T	
	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
f'	> 0 s. m. w.	0	> 0 s. m. w.	/	< 0 s. m. f.	0	> 0 s. m. w.

Krümmung

		S		a	
	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f''	< 0 neg. gekr. t oberhalb	0	> 0 pos. gekr. t unterhalb	/	> 0 pos. gekr. t unterhalb

8) Symmetrieeigenschaften
9) Graph

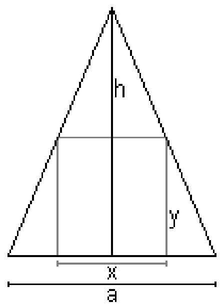


17) Extremwertaufgaben

= OPTIMIERUNGSAUFGABEN
= MAXIMA – MINIMA BEISPIELE

Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe h soll ein Rechteck, welches den größten Flächeninhalt besitzt, eingeschrieben werden.

geg.: △ (a,h)
ges.: ▭ (x,y) mit $_{max}A$



D:

$D_x = [0;a]$
$D_y = [0;h]$

Hauptbedingung HB

$A = x \cdot y$

$A = \frac{a(h-y)}{2} \cdot y$

$f_{(y)} = \frac{a}{h}(h-y) \cdot y$

$f_{(y)} = \frac{a}{h}(hy - y^2)$

$f'_{(y)} = \frac{a}{h}(h-2y)$

$\frac{a}{h}(h-2y) = 0 \quad | \cdot \frac{a}{h}$

$h - 2y = 0$

$2y = h$

$y = \frac{h}{2}$

$x = \frac{a}{2}$

Nebenbedingung NB

$\frac{a}{2} : h = \frac{x}{2} : (h-y)$

$\frac{a}{2} \cdot (h-y) = h \cdot \frac{x}{2} \quad | \cdot 2$

$a(h-y) = x \cdot h$

$x = \frac{a(h-y)}{2}$

$A = \frac{a \cdot h}{4}$

$f''_{(y)} = \frac{a}{h} \cdot (-2)$

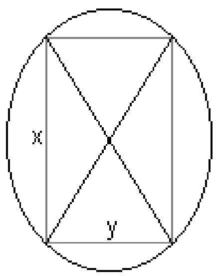
$f''_{(\frac{h}{2})} = \frac{a}{h} \cdot (-2) \quad < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum

Das gesuchte Rechteck hat die Länge $x = \frac{a}{2}$ und die Breite $y = \frac{h}{2}$ mit der Maximalfläche $A = \frac{a \cdot h}{4}$.

18) Extremwertaufgaben

Welches von allen Rechtecken mit gegebener Diagonale d hat die größte Fläche.

geg.: d
ges.: ▭ mit $_{max}A$



D:

$D_x = [0; \frac{d}{2}]$
$D_y = [0; \frac{d}{2}]$

HB

$A = x \cdot y$
$A^2 = x^2 \cdot y^2$

NB

$x^2 + y^2 = d^2$
$y^2 = d^2 - x^2$

$A = x^2 (d^2 - x^2)^2$
$f_{(x)} = d^2x^2 - x^4$
$f'_{(x)} = 2d^2x - 4x^3$

$2d^2x - 4x^3 = 0 \quad | :2$
$d^2x - 2x^3 = 0$
$x(d^2 - 2x^2) = 0$

$x_1 = 0$ (Randextremum)

$y_1 = d$

$d^2 - 2x^2 = 0$
$2x^2 = d^2$
$x^2 = \frac{d^2}{2}$
$x_2 = \frac{d}{\sqrt{2}}$
$y_2 = d^2 - \frac{d^2}{2}$
$y_2 = \frac{d^2}{2}$

$$A = \frac{d^2}{2} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} = (\frac{d}{\sqrt{2}})^3$$

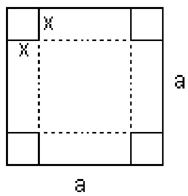
$$f''_{(x)} = 2d^2 - 12x^2$$
$$f''_{(\frac{d}{\sqrt{2}})} = 2d^2 - 12\frac{d^2}{2} = 2d^2 - 6d^2 = -4d^2 \quad < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

Das gesuchte Rechteck hat die Länge $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$ und die Breite $y = \frac{d^2}{2}$ mit der Maximalfläche $A = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

19) Extremwertaufgaben

Von einem quadratischen Blech mit der Seitenlänge a werden an den Ecken Quadrate ausgeschnitten. Aus dem Rest des Bleches wird eine Schachtel gebildet. Wie muss die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?

geg.: □ (a)
ges.: □ (x) damit $_{max}V$



D:

$D_x = [0; \frac{a}{2}]$

HB

$V = (a - 2x)^2 \cdot x$

$f_{(x)} = (a - 2x)^2 \cdot x$
$f'_{(x)} = 2(a - 2x)^2 \cdot (-2) \cdot x + (a - 2x)^2 \cdot 1$

$2(a - 2x)^2 \cdot (-2) \cdot x + (a - 2x)^2 = 0$
$(-4x + a - 2x)(a - 2x) = 0$
$(-6x + a)(a - 2x) = 0$

$x_1 = \frac{a}{6}$ $x_2 = \frac{a}{2}$ (Randextremum)

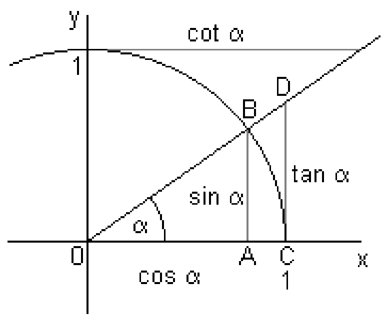
$V = (a - 2\frac{a}{6})^2 \cdot \frac{a}{6}$
$V = \frac{2a^3}{27}$

$f''_{(x)} = (-6)(a - 2x) + (-6x + a)(-2) = -6a + 12x + 12x - 2a = -8a + 24x$
$f''_{(\frac{a}{6})} = -8a + 4a = -4a < 0 \Rightarrow$ Maximum

Die gesuchte Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate ist $x = \frac{a}{6}$.
Die Schachtel hat das Maximalvolumen $V = \frac{2a^3}{27}$.

20) Drehkegel Stumpf

21) Ableitung der Winkelfunktionen



Gradmaß Bogenmaß
180° = π

$A_{\circlearrowleft} = \frac{r^2\pi\,\alpha}{360°} = \frac{r\,b}{2}$

$A_{\Delta 0AB} < A_{\Delta 0CB} < A_{\Delta BCD}$

$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2} < \frac{\text{arc}\,\alpha\cdot 1}{2} < \frac{1\cdot\tan\alpha}{2}$ | :2

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ | :(sin α → 0) 1. Quadrant ⇒ positiv

$\cos\alpha < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$

α → 0:

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha \le \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} \le \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}$

$1 \le \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} \le 1$

reziprok ⇒ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ *

- <u>y = sin x</u>

y = sin x = $f_{(x)}$
y' = cos x

$y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\alpha = x + \Delta x$ $\beta = x$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = x + \frac{\Delta x}{2}$ $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\Delta x}{2}$

$y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$* = \lim\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x$

y' = cos x

- <u>$y = \cos x$</u>

 $y = \cos x$ $= \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
 $y' = -\sin x$

$y' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = (-1) \cdot \sin x$
 $y' = -\sin x$

- <u>$y = \tan x$</u>

 $y = \tan x$ $= \frac{\sin x}{\cos x}$
 $y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$
 $y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

- <u>$y = \cot x$</u>

 $y = \cot x$ $= \frac{\cos x}{\sin x}$
 $y' = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$y' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
 $y' = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

22) Beweise der Tangentenformeln

Tangentenformel für Ellipse in 1. Hauptlage

[siehe Nr1, Tangentengleichung und Polarengleichung, S5]

geg.: ell: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *
$T(x_1|y_1)$
ges.: t: $y = kx + d$

Tangentengleichung: $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ | ' Implizites Differenzieren [siehe Nr12, Implizites Differenzieren, S40]
$2b^2x + 2a^2yy' = 0$
$2a^2yy' = -2b^2x$ | : $2a^2y$
$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$ ... allgemeiner Anstieg einer Ellipse

T: $y'_{(x_1|y_1)}$: $y' = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = k_t$
t: $y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x + d$
mit T: $y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x_1 + d$
$d = y_1 + \frac{b^2x_1^2}{a^2y_1}$
$d = \frac{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}{a^2y_1} = \frac{a^2b^2}{a^2y_1}$ *
$d = \frac{b^2}{y_1}$

t: $y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x + \frac{b^2}{y_1}$ | $\cdot a^2y_1$
$a^2y_1y = -b^2x_1x + a^2b^2$
$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$ wzbw

Tangentenformel für Hyperbel in 1. Hauptlage

[siehe Nr2, Tangentengleichung und Polarengleichung, S8]

geg.: hyp: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ *
$T(x_1|y_1)$
ges.: t: $y = kx + d$

Tangentengleichung: $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ | ' Implizites Differenzieren [siehe Nr12, Implizites Differenzieren, S40]
$2b^2x - 2a^2yy' = 0$
$2a^2yy' = 2b^2x$ | : $2a^2y$
$y' = \frac{b^2x}{a^2y}$ ... allgemeiner Anstieg einer Hyperbel

T: $y'_{(x_1|y_1)}$: $y' = \frac{b^2x_1}{a^2y_1} = k_t$
t: $y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x + d$
mit T: $y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x_1 + d$

$d = y_1 - \frac{b^2x_1^2}{a^2y_1}$

$d = \frac{a^2y_1^2 - b^2x_1^2}{a^2y_1} = (-1)\cdot\frac{b^2y_1^2 - a^2x_1^2}{a^2y_1} = -\frac{a^2b^2}{a^2y_1}$ *

$d = -\frac{b^2}{y_1}$

t: $y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x - \frac{b^2}{y_1}$ $\quad | \cdot a^2y_1$

$a^2y_1y = b^2x_1x - a^2b^2$

$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$ wzbw

▪ Tangentenformel für Parabel in 1. Hauptlage

[siehe Nr3, Tangentengleichung und Polarengleichung, S11]

geg.: par: $y^2 = 2px$ *

$T(x_1|y_1)$

ges.: t: $y = kx + d$

Tangentengleichung: $yy_1 = p(x + x_1)$

$y^2 = 2px$ $\quad |\,'$ Implizites Differenzieren [siehe Nr12, Implizites Differenzieren, S40]

$2yy' = 2p$

$y' = \frac{p}{y}$ ... allgemeiner Anstieg einer Parabel

T: $y'_{(x_1|y_1)}$: $y' = \frac{p}{y_1} = k_t$

t: $y = \frac{p}{y_1}\cdot x + d$

mit T: $y_1 = \frac{p}{y_1}\cdot x_1 + d$

$d = y_1 - \frac{p}{y_1}\cdot x_1$

$d = \frac{y_1^2 - px_1}{y_1} = \frac{2px_1 - px_1}{y_1}$ *

$d = \frac{px_1}{y_1}$

t: $y = \frac{p}{y_1}\cdot x + \frac{px_1}{y_1}$ $\quad | \cdot y_1$

$y_1y = px + px_1$

$yy_1 = p(x + x_1)$ wzbw