

Behauptung:  $x^2 = 2 \Rightarrow x$  ist nicht Element aus  $\mathbb{Q}$

Annahme:  $x^2 = 2 \Rightarrow x$  ist Element aus  $\mathbb{Q}$

Wenn es eine Lösung für  $x$  gibt kann es nur ein Dezimalbruch sein, da man mit einem abbrechenden Bruch nicht auf die Wurzel von 2 kommen kann.

Also:  $x^2 = 2 \Leftrightarrow (p/q)^2 = 2 \Leftrightarrow x = p/q$

$q$  kann nicht 1 sein weil die Wurzel aus 2 zwischen 1 und 2 liegt. Wenn der Nenner nämlich 1 wäre würde der Bruch 1;2;3... er könnte also nicht zwischen 1 und 2 liegen.

Da  $p/q$  vollständig gekürzt ist sind  $p$  und  $q$  teilerfremd und Element aus  $\mathbb{N}$ .

Wenn  $x^2 = 2$  mit  $p/q$  erfüllt werden soll muss gelten:

$$x^2 = 2 \approx (p/q)^2 = 2 \approx p^2/q^2 = 2$$

Wenn  $q$  nicht 1 ist kann  $q^2$  auch nicht 1 sein und da  $p$  und  $q$  teilerfremd sind kann der Bruch keine Natürliche Zahl enthalten also **auch keine 2**, es gilt:

$$p^2/q^2 \text{ nicht Element aus } \mathbb{N} \approx p^2/q^2 \neq 2$$

Für  $x^2 = 2$  existiert keine rationale Lösung.