Michael Manglberger mangl@gmx.net

Johann-Michael-Fischer-Gymnasium
Burglengenfeld

Kollegstufenjahrgang 1995/97

FACHARBEIT

aus dem Fach

Mathematik

Thema: Bestimmung exakter Lösungen der Gleichung: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Verfasser: Michael Manglberger
Leistungskurs: Mathematik M2
Kursleiter: StD Günther Maierhofer
Abgabetermin: 3. Februar 1997

Erzielte Note: ______________ in Worten: __________________________

Erzielte Punkte: ______________ in Worten: __________________________
(einfache Wertung)

Abgabe beim Kollegstufenbetreuer am 3. Februar 1997

____
(Unterschrift des Kursleiters)

Gliederung

Einleitung

Bis zum 16. Jahrhundert war es nicht möglich, kubische Gleichungen exakt zu lösen. Man benutzte Näherungsverfahren wie zum Beispiel das Horner - Schema, um die Lösungen näherungsweise zu errechnen. Man nutzte graphische Verfahren, bei denen man einfach ablesen konnte. Heutzutage haben wir sowohl die mathematischen Voraussetzungen wie auch die exakten Lösungsformeln.
Jedoch ist es heute nicht mehr üblich, Gleichungen dritten Grades exakt zu lösen. Im Zeitalter der Computer ist es einfach geworden, Näherungslösungen beliebig genau und mit geringem Aufwand zu berechnen. Der Trick besteht darin, eine Approximationsmethode als Algorithmus zu entwickeln, die zur Annäherung an den exakten Wert beliebig oft hintereinander ausgeführt werden muß, oder anders gesagt, die iterierbar ist. Ein Beispiel hierfür ist der „Heron - Algorithmus“ zur Bestimmung des Wertes einer Wurzel oder die „Regula Falsi“ zur Berechnung einer Nullstelle einer Funktion.
Ein zweiter Grund, die exakte Lösungsformel zu umgehen, ist vielleicht auch die Tatsache, daß es nicht möglich ist, einen in sich geschlossenen Lösungsausdruck zu formulieren. Es ist nötig, durch Substitutionen mehrere Umwege zu gehen. Nur durch Hilfsgrößen ist es machbar, auf die Nullstellen zurückzurechnen, wie wir noch sehen werden. Auch die Schulmathematik behandelt die Lösung von Gleichungen dritten Grades nur oberflächlich, obwohl es genügend mathematische Probleme gibt, die auf derartige Gleichungen führen. Man nutzt andere Mittel, wie zum Beispiel die Polynomdivision oder auch graphische Verfahren, die jedoch den Nachteil haben, daß sie auf zufälligem Erraten der Nullstellen oder auf ungenauem Ablesen in Zeichnungen basieren. Mit der Polynomdivision stößt man auch sehr schnell an Grenzen, nämlich dann, wenn die exakten Nullstellen keine ganzen Zahlen oder derartig „einfach gebaute“ Werte sind. Dies sollte einen begeisterten Mathematiker nicht zufriedenstellen. Darum setzten sich im Mittelalter mehrere Gelehrte mit diesem Problem auseinander, womit wir bei der Entstehung der Lösungsformel angelangt wären.

Entstehungsgeschichte und Namengebung der Formel[1]

Der Wissensstand der Mathematik bis zum Ende des 15. Jahrhunderts wurde als eine der ersten Zusammenfassungen von dem italienischen Mönch Luca Paccioli veröffentlicht. Seine Schrift mit dem Namen „Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalitata“, die er 1487 verfaßte und 1494 in Venedig erschienen ist, enthält Abhandlungen aus den Bereichen Geometrie, Buchhaltung, Proportionslehre, Polyeder und vieles mehr. Auch lineare und quadratische Gleichungen werden behandelt. Paccioli stellte allerdings die Hypothese auf, daß die rechnerisch exakte Auflösung kubischer Gleichungen der Form $ax^3 + cx + d = 0$ nicht möglich ist. Dieser Irrtum wurde 51 Jahre später in der 1545 erschienenen „Ars magna sive de regulis algebraicis“ (Die große Kunst oder über die algebraischen Regeln) widerlegt. Verfaßt hat dieses Buch der 1501 in Pavia geborene Philosoph, Arzt und Mathematiker Geronimo Cardano (1501 - 1576). Wie wir unter anderem auch aus Cardanos eigenem Werk wissen, ist jedoch nicht er, sondern ein gewisser Scipione del Ferro (1456 - 1526) der eigentliche Entdecker der Formel. Soweit man die damaligen Begebenheiten überschauen kann, teilte del Ferro den Lösungsweg seinem Schüler Antonio Maria Fior mit. Dieser hatte eine Wette mit Niccolo Tartaglia (1499 od. 1500 - 1557) über die Lösung mehrerer kubischer Gleichungen, die Tartaglia innerhalb der gesetzten Frist lösen konnte. Darum wurde er von Fior und Cardano um die Bekanntmachung seines Lösungsweges gebeten. Nach längerem Zögern verriet er Geronimo Cardano verschiedene recht unüberschaubare Gleichungen zur Lösung des Problems unter der Bedingung, Cardano müsse schwören, daß er sein Geheimnis nicht veröffentlichen werde. Er aber brach den Eid und veröffentlichte in seiner „Ars magna“ die Lösungsmethodik Tartaglias, allerdings unter Nennung sämtlicher daran beteiligter Personen. Darauf entbrannte ein wilder Streit zwischen den beiden Mathematikern, in welchem Cardano seinem Gegenspieler vorwarf, den Lösungsweg von del Ferro „abgeschrieben“ zu haben. Er ging öffentlichen Streitgesprächen aus dem Weg oder schickte mit einem seiner Schüler Raufbolde dorthin, so daß sich Tartaglia mit Unwillen zurückziehen und aufgeben mußte.

[1] Singemäß aus: Biographien bedeutender Mathematiker, S. 112-124

Cardanos Vorgehensweise war in keiner Weise gerechtfertigt. Somit war aber die Auflösung bekannt, was die zukünftige mathematische Forschung entscheidend vorantrieb. Deshalb erhielt die Formel zur Lösung der kubischen Gleichung seinen Namen.
Es gab jedoch Fälle, in denen man mit dem damaligen Können und den Rechenmöglichkeiten an die Grenzen stieß, da eine in der Formel auftretende Wurzel nicht berechnet werden konnte. Darum wurde dieser Fall als „Casus irreducibilis“ bezeichnet, was sich bis in unsere Zeit gehalten hat. Heute können wir auch diesen Fall lösen, und zwar mit Hilfe der komplexen Rechengesetze und/oder trigonometrischer Funktionen. Wir stellen fest, daß genau in diesem Fall alle Lösungen der Gleichung dritten Grades reeller Natur sind.
Da wir nun mit der Entdeckungsgeschichte der Formel besser vertraut sind, widmen wir uns nun der Gestalt und der Lösungsmethodik der kubischen Gleichung.

Die drei exakten Lösungen und deren Herleitung[2]

Um die kubischen Gleichungen vollständig lösen zu können, ist sowohl die Kenntnis trigonometrischer Funktionen wie auch das Rechnen mit komplexen Zahlen erforderlich. Hierin liegt auch die Ursache für den „Casus irreducibilis“, da die damalige Mathematik manchen rechnerischen Mitteln noch nicht mächtig war, wie wir später noch ausführlich betrachten werden.
Um die Herleitung etwas überschaubarer zu gestalten, werden längere Gleichungsumformungen (U1,U2,...) in den Anhang ausgelagert, wo sie zum besseren Verständnis nachvollzogen werden können.

Brockhaus, Enzyklopädie

[2] Sinngemäß aus: Dörrie, H.: Kub. und biquadrat. Gleichungen, S. 7-31

Die rein kubische Gleichung und ihre Wurzeln

Wir beginnen mit der einfachsten Form einer kubischen Gleichung:

$$x^3 = 1 \qquad \text{oder} \qquad x^3 - 1 = 0$$

Es ist einfach zu zeigen, daß x = 1 nicht die einzige Wurzel dieser Gleichung ist. Wir wenden eine allgemeine trinomische Umformung[3] konkret auf unser Beispiel an und erhalten:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

Jetzt wird deutlich, daß sich die beiden anderen Wurzeln aus der als Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0$$

ergeben. Da die Diskriminante D = -3 < 0 ist, sind beide Ausdrücke komplex:

$$\omega = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \qquad \text{und} \qquad \varpi = \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \qquad \text{mit} \qquad i^2 = -1$$

i stellt die imaginäre Einheit dar. Die Probe beweist:

$$\omega^3 = 1 \qquad \varpi^3 = 1 \qquad \varpi = \omega^2 = 1/\omega$$

Nun ist bewiesen, daß diese Gleichung drei Lösungen besitzt, nämlich:

$$x_1 = \omega \qquad x_2 = \omega^2 \qquad x_3 = \omega^3 = 1$$

Die Reduktion der allgemeinen Form

Zielsetzung ist die Lösung der Gleichung dritten Grades in ihrer allgemeinsten Form:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0 \quad \text{(G1)} \qquad \text{mit} \qquad a,b,c,d \in \Re\,;\ a \neq 0$$

Der Trick besteht vorerst darin, durch eine geeignete Substitution den quadratischen Summanden aus der Gleichung zu kürzen, diese also auf eine reduzierte einfachere Form zu bringen. Um zu einem späteren Zeitpunkt Brüche zu ver-

---

[3] Aus: Barth/Mühlbauer/Nikol/Wörle: Mathematische Formeln und Definitionen (Formelsammlung)

meiden, multipliziert man die Gleichung zuerst mit $27a^2$ und führt anschließend eine Substitution mit dem Ausdruck

$$X = 3ax + b \qquad \text{(G2)}$$

durch. Man erhält durch eine längere Umformung (U1) die Gleichung:

$$X^3 = 3 \cdot \left[b^2 - 3ac\right] X + \left[9abc - 27a^2 d - 2b^3\right]$$

Jetzt führt man für die Ausdrücke in den eckigen Klammern neue abkürzende Bezeichner m, n ein. So erhalten wir für X die sog. reduzierte Gleichung:

$$X^3 = 3m \cdot X + n \qquad \text{(G3)} \qquad \text{mit}$$

$$m = b^2 - 3ac \qquad \text{und} \qquad n = 9abc - 27a^2 d - 2b^3$$

Finden wir die Lösung von (G3), so können wir über die Substitution (G2) auf die Lösungen der originären Ausgangsgleichung (G1) zurückrechnen. Gesucht sind also die Lösungen der reduzierten kubischen Gleichung.

Die kardanische Formel

Um zu einer Lösung zu gelangen, führt man eine weitere Substitution durch. X sei die Summe aus zwei Bestandteilen u, v:

$$X = u + v$$

Jetzt betrachtet man eine neue Gleichung, nämlich die Binomialentwicklung:[4]

$$\underbrace{(u+v)^3}_{X^3} = \underbrace{3 \cdot uv \cdot (u+v)}_{3m \cdot X} + \underbrace{\left[u^3 + v^3\right]}_{n}$$

Wie die geschweiften Klammern zeigen, wird ersichtlich, daß diese Entwicklung mit der reduzierten Gleichung (G3) übereinstimmt unter der Verwendung oben genannter Substitution und folgender Bedingungen:

$$u \cdot v = m \qquad \text{und} \qquad u^3 + v^3 = n$$

Wenn es also möglich ist, beides zu erfüllen, können wir davor ausgehen, daß

$$\Gamma = u + v$$

eine Wurzel von (G3) ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise führt man zwei neue Bezeichner ein und erhält obige Bedingungen in einer etwas anderen

[4] Aus: Barth/Mühlbauer/Nikol/Wörle: Mathematische Formeln und Definitionen (Formelsammlung)

Schreibweise:

$$u^3 = U \qquad v^3 = V$$

$$\Rightarrow \qquad UV = m^3 \qquad U + V = n$$

Letztere Gleichungen stellen die Konditionen für die Anwendung des Satzes von Vieta dar:[5]

„Sind x_1, x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so ist:

$$x_1 + x_2 = -p \quad ; \qquad x_1 \cdot x_2 = q\text{“}$$

Angewendet auf unsere Problemstellung ergibt sich:

$$(W - U)(W - V) = 0 \Leftrightarrow W^2 - nW + m^3 = 0 \quad \text{[Umformung(U2)]}$$

Diese „quadratische Resolvente“ besitzt zwei Lösungen, die mit der bekannten quadratischen Formel gefunden werden können:

$$U,V = \tfrac{1}{2}\left(n \pm \sqrt{n^2 - 4m^3}\right)$$

$$\Rightarrow U = \tfrac{1}{2}\left(n + \sqrt{n^2 - 4m^3}\right)$$

$$\Rightarrow V = \tfrac{1}{2}\left(n - \sqrt{n^2 - 4m^3}\right)$$

Nun setzt man ein:

$$\Gamma = u + v = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V}$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 - 4m^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n - \sqrt{n^2 - 4m^3}}{2}} \qquad \text{(G4)}$$

Dies ist bereits die k a r d a n i s c h e Formel. Sie stellt die Wurzel $X = \Gamma$ der reduzierten kubischen Gleichung (G3) dar. Um zu der Lösung der Ausgangsgleichung (G1) zu gelangen, löst man einfach die allererste Substitution (G2) nach x auf und setzt für X ein. Man erhält:

$$x_1 = \frac{\Gamma - b}{3a}$$

Der verwendete Index deutet bereits an, daß Γ nicht die einzige Lösung ist. Denn wie bei der schon behandelten rein kubischen Gleichung gibt es auch im allgemeineren Falle noch zwei weitere Lösungsmöglichkeiten.

[5] Aus: Athen, H./Bruhn, J.: Lexikon der Schulmathematik, Band 4, S. 1143

Die Berechnung der zweiten und dritten Lösung

Um auch die beiden anderen Wurzeln der reduzierten Gleichung (G3), bezeichnet mit A und B, zu bekommen, geht man folgendermaßen vor:
Man ersetzt in Gleichung (G3) die Variable X durch die gefundene Wurzel Γ, löst den erhaltenen Zusammenhang nach n auf. Diesen setzt man jetzt wieder für n in die Gleichung (G3) ein und formt diese weiter um (U3). Am Ende ergibt sich:

$$(X-\Gamma)\left(X^2+\Gamma X+\Gamma^2-3m\right)=0$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn jeweils einer der Faktoren gleich Null ist. Der erste Faktor stellt unsere bereits gefundene Lösung dar, denn wenn man $X=\Gamma$ einsetzt, ist er bereits Null. Diese Tatsache legt nahe, daß die noch fehlenden Lösungen A und B sich aus der „Hilfsgleichung“

$$X^2+\Gamma X+\left(\Gamma^2-3m\right)=0$$

ergeben. Sie müssen, um die Werte für die Ausgangsgleichung (G1) zu erhalten, wieder in den umgeformten Linearausdruck (G2) eingesetzt werden. Weitere Wurzeln außer A, B und Γ besitzt die Gleichung (G3) nicht.

Die Berechnung von A und B ist noch auf einem anderen Weg möglich, denn sie besitzen noch eine andere Form der Darstellung:

$$A=\omega\cdot u+\omega^2 v \quad \text{(G5)}, \qquad B=\omega^2 u+\omega\cdot v \quad \text{(G6)}$$

Das ergibt sich aus der Dreideutigkeit der Kubikwurzel $\sqrt[3]{U}$ bzw. $\sqrt[3]{V}$,wie wir in Abschnitt 3.1. bereits behandelt haben. Die Wurzeln können die Werte $\omega\cdot u,\ \omega^2 u,\ \omega^3 u=u$ bzw. $\omega\cdot v,\ \omega^2 v,\ \omega^3 v=v$ annehmen. Beide Lösungen sind aber, wie auch die der kardanischen Formel, zusammengesetzt aus zwei Summanden. Nach der immer noch geltenden Gleichung $u\cdot v=m$ sind dann nur drei Kombinationen möglich:

$\omega\cdot u+\omega^2 v$, $\omega^2 u+\omega\cdot v$ und $\omega^3 u+\omega^3 v=u+v$ mit $\omega=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

Letztere Möglichkeit haben wir ja bereits berechnet. Die Anderen sind unsere gesuchten Wurzeln A und B. Auch hieraus lassen sich nun wieder die Lösungen der Ausgangsgleichung (G1) errechnen, indem man in die Substitution (G2) einsetzt.

Um etwas Licht in die Herleitung zu bringen, fassen wir an dieser Stelle den Lösungsweg noch einmal zusammen:[6]

„Die reduzierte kubische Gleichung (G3)

$X^3 = 3m \cdot X + n$ mit $m = b^2 - 3ac$ und $n = 9abc - 27a^2d - 2b^3$

besitzt drei Wurzeln A, B, Γ. Dabei ist

$\Gamma = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{U}$, $v = \sqrt[3]{V}$,

wo $U = \frac{1}{2}\left(n + \sqrt{n^2 - 4m^3}\right)$ und $V = \frac{1}{2}\left(n - \sqrt{n^2 - 4m^3}\right)$

die Wurzeln der quadratischen Resolvente

$$W^2 - nW + m^3 = 0$$

bedeuten, während A und B die beiden Wurzeln der quadratischen Hilfsgleichung

$$X^2 + \Gamma X + \left(\Gamma^2 - 3m\right) = 0$$

sind.

Wir fügen hinzu:

Alle drei Wurzeln lassen sich als Linearaggregate von u und v darstellen:

$A = \omega \cdot u + \omega^2 v$ (G5), $B = \omega^2 u + \omega \cdot v$ (G6), $\Gamma = u + v$“

Um jetzt zu den Lösungen der allgemeinen Gleichung (G1)

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$$

zu gelangen, setzt man in (G2) jeweils anstelle X die Wurzeln A, B, Γ ein. Es ergibt sich dann also:

$$\boxed{x_1 = \frac{(\Gamma - b)}{3a}}, \qquad \boxed{x_2 = \frac{(A - b)}{3a}}, \qquad \boxed{x_3 = \frac{(B - b)}{3a}}$$

Hiermit ist das Ziel, eine allgemeine Formel für die exakte Lösung zu formulieren, erreicht. Leider hat diese Form einen „Haken“. Es gibt kubische Gleichungen, für welche die Wurzeln der kardanische Formel nicht zu ziehen sind, da U und V komplexe Werte annehmen. In diesem Fall muß man rechnerische Umwege gehen, die zur Zeit Cardanos noch nicht zur Verfügung standen. Daher rührt auch die Bezeichnung „Casus irreducibilis“ (der nicht zurückführbare Fall),

---

6 Aus: Dörrie, H.: Kub. und biquadrat. Gleichungen, S. 17

die sich bis heute gehalten hat. Im Folgenden werden wir zeigen, daß auch dies kein Problem mehr darstellt.

Der „Casus irreducibilis“

Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn der Radikand der Quadratwurzeln in der kardanischen Formel negativ wird, was zur Folge hat, daß U und V komplexe Zahlen werden. Zur Lösung dieses Problems, geht man einfach einen anderen Weg. Man beginnt wiederum mit der reduzierten Gleichung (G3):

$$X^3 = 3m \cdot X + n$$

Diese vergleicht man, was wir in Abschnitt 3.3. bereits durchgeführt haben, mit einer anderen Gleichung, diesmal mit dem Multiplikationssatz für die Cosinusfunktion mit dem Multiplikator 3. Er lautet:

$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

Man multipliziert die Gleichung mit der dritten Potenz einer noch unbestimmten Größe r und führt zwei neue Substitutionen ein:

$$3\varphi = \Phi \qquad \text{und} \qquad \xi = 2r\cos\varphi$$

Durch geringfügige Umformungen (U4) ergibt sich:

$$\underbrace{\xi^3}_{X^3} = \underbrace{3r^2\xi}_{3m\cdot X} + \underbrace{2r^3\cos\Phi}_{n}$$

Die Gleichungen sind also wiederum identisch und $\xi = 2r\cos\varphi$ somit die Lösungswurzel von Gleichung (G3), wenn gilt:

$$r^2 = m \Leftrightarrow r = \sqrt{m}$$

$$\text{und} \qquad 2r^3\cos\Phi = n$$

$$\Leftrightarrow \cos\Phi = \frac{n}{2r^3} = \sqrt{\frac{n^2}{4m^3}}$$

Die zweite und dritte Lösung erlangt man, indem man zu Φ in der Cosinusfunktion 360° addiert bzw. subtrahiert:

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{3}(\Phi + 360°) = \varphi + 120° \qquad \text{und analog} \qquad \varphi_3 = \varphi - 120°$$

Fassen wir also das Ergebnis zusammen:[7]

„Im irreduziblen Falle (...) sind die drei Wurzeln der reduzierten Gleichung

$$X^3 = 3m \cdot X + n$$

$$\Gamma = 2r\cos\varphi \qquad A = 2r\cos(\varphi + 120°) \qquad B = 2r\cos(\varphi - 120°)$$

wo $r = \sqrt{m}$, $\varphi = \frac{1}{3}\Phi$

ist und der Hilfswinkel Φ durch die Vorschrift

$$\cos\Phi = \frac{n}{2r^3} = \sqrt{\frac{n^2}{4m^3}}$$

bestimmt wird."

Wie man sieht, sind jetzt alle Wurzeln von reeller Natur. Durch die Substitution (G2) ist es dann wieder möglich, die Lösungen der allgemeinen kubischen Gleichung (G1) zu berechnen.

Nun sind wir in der Lage, in jedem Fall die Wurzeln der Ausgangsgleichung zu bestimmen. Da es aber für jeweils verschiedene Gleichungen andere Lösungswege gibt, stellt sich die Frage nach einer Größe, die anzeigt, welcher Weg eingeschlagen werden muß. Diese nennt man, wie bereits von der quadratischen Lösungsformel bekannt, Diskriminante.

Die Diskriminante der kubischen Gleichung

Zu ihrer Bestimmung sucht man nach der Bedingung, die uns veranlaßte, den Lösungsweg für den „Casus irreducibilis" zu verwenden. Diese war, daß die Radikanden der Quadratwurzeln in der kardanischen Formel (G4) negativ wurden. Man erhält also:

$$n^2 - 4m^3 < 0 \Rightarrow \Delta = 4m^3 - n^2 > 0$$

mit $m = b^2 - 3ac$ und $n = 9abc - 27a^2d - 2b^3$

Man nutzt also im Fall $\Delta > 0$ den unter 3.5. behandelten Lösungsweg. Es ergeben sich drei reelle Wurzeln. Die Situation $\Delta < 0$ läßt folgern, daß sich die Kubikwurzeln der kardanischen Formel (G4) ziehen lassen. Man berechnet also

[7] Aus: Dörrie, H.: Kub. und biquadrat. Gleichungen, S. 17

nach dem in 3.3. und 3.4. hergeleiteten Weg. Es gibt somit drei verschiedene Lösungen, von denen eine reell und zwei komplex sind.

Der Fall $\Delta = 0$ ist bisher noch nicht aufgetaucht. Aber auch hier sind die zu erwartenden Lösungen schnell veranschaulicht, denn für $\Delta = 0$ entfallen die Quadratwurzeln der kardanischen Formel (G4). Es ergibt sich:

$$\Gamma = u + v = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}n} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}n} = \sqrt[3]{4n}$$

$$\Rightarrow u = v$$

$$\Rightarrow \mathrm{A} = \omega \cdot u + \omega^2 v = \omega \cdot v + \omega^2 u = B$$

$$\Leftrightarrow A = B = u(\omega + \omega^2) = v(\omega + \omega^2)$$

$$\Leftrightarrow A = B = -u = -v = -\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}n}$$

Man erhält also eine Doppellösung und eine weitere reelle Wurzel.

Zum Schluß faktorisieren wir Δ und lassen alle Faktoren, die nicht Null werden können, weg. So erhält man die Diskriminante der kubischen Gleichung (G1):

$$\theta = 18abcd + b^2c^2 - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4db^3 \qquad \text{[Umformung (U5)]}$$

Obige Ergebnisse faßt man zusammen im Diskriminantensatz:[8]

„Die kubische Gleichung

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$$

hat drei verschiedene reelle Wurzeln oder eine Doppelwurzel und eine weitere reelle Wurzel oder endlich eine reelle und zwei (konjugiert) komplexe Wurzeln, je nachdem ihre Diskriminante

$$\theta = 18abcd + b^2c^2 - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4db^3$$

positiv, null oder negativ ist.“

Veranschaulichung anhand charakteristischer Beispiele

Wir besitzen jetzt alle wichtigen Mittel zur Lösung einer kubischen Gleichung. Darum wird in den nächsten drei Punkten das Arbeiten mit den Lösungsformeln mit Hilfe von drei Beispielen verdeutlicht. Dazu betrachten wir jeweils eine Gleichung mit $\theta > 0,\ \theta = 0,\ \theta < 0$.

[8] Aus: Dörrie, H.: Kub. und biquadrat. Gleichungen, S. 31

Fallbeispiel mit positiver Diskriminante θ

Betrachten wir zuerst den Lösungsweg für eine Situation des „Casus irreducibilis“, nämlich die Gleichung:

$$2x^3-5x^2-14x+8=0$$

Wir setzten also die Größen:

$$a=2,\ \ b=-5,\ \ c=-14,\ \ d=8$$

Es ergibt sich dann:

$$\theta=44100>0,\ \ m=109,\ \ n=646$$

$$X^3=327X+646$$

$$\cos(3\varphi)=\cos\Phi=\sqrt{\tfrac{104329}{1295029}}$$
$$\Rightarrow \Phi\approx 73{,}510900$$
$$\Rightarrow \varphi\approx 24{,}503633$$

$$\Rightarrow \Gamma=2r\cos\varphi=2\sqrt{m}\cos\varphi=19$$
$$\Rightarrow \mathrm{A}=2\sqrt{m}\cos(\varphi+120°)=-17$$
$$\Rightarrow B=2\sqrt{m}\cos(\varphi-120°)=-2$$

Jetzt setzt man ein in die Substitution (G2):

$$x_1=\frac{(\Gamma-b)}{3a}=4\,,\qquad x_2=\frac{(A-b)}{3a}=-2\,,\qquad x_3=\frac{(B-b)}{3a}=\tfrac{1}{2}$$

Obige kubische Versuchsgleichung lautet in Faktorschreibweise dann:

$$2x^3-5x^2-14x+8=0\Leftrightarrow(x-4)(x+2)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)=0$$

Fallbeispiel mit Diskriminante $\theta=0$

Jetzt wählen wir ein Beispiel mit einer Doppellösung, nämlich die Gleichung:

$$4x^3+36x^2-39x+10=0$$

Damit sind:

$$a=4,\ \ b=36,\ \ c=-39,\ \ d=10$$

$$\Rightarrow \theta=0,\ \ m=1764,\ \ n=-148176$$
$$\Rightarrow \Gamma=2u=2v=\sqrt[3]{4n}=-84$$
$$\Rightarrow A=B=-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}n}=42$$

In (G2):

$$x_1 = \frac{(\Gamma - b)}{3a} = -10 \qquad x_2 = x_3 = \frac{(A-b)}{3a} = \tfrac{1}{2}$$

Obige kubische Versuchsgleichung lautet in Faktorschreibweise dann:

$$4x^3 + 36x^2 - 39x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x+10)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Fallbeispiel mit negativer Diskriminante θ

Die letzte Gleichung, die wir betrachten, lautet:

$$2x^3 - 7x^2 + 22x + 13 = 0$$

Wir wählen also:

$$a = 2,\ \ b = -7,\ \ c = 22,\ \ d = 13$$

Dann ergeben sich:

$X^3 = -249X - 3490$

$\theta = -133956 < 0,\ \ m = -83,\ \ n = -3490$

$\Rightarrow W^2 - nW + m^3 = W^2 + 3490 \cdot W - 571787 = 0$ (quadratische Resolvente)

$\Rightarrow u^3 = U = -1745 + 1098\sqrt{3},\ \ v^3 = V = -1745 - 1098\sqrt{3}$

$\Rightarrow \Gamma = u + v = -10$

Man setzt jetzt in die „quadratische Hilfsgleichung“ ein:

$$X^2 + \Gamma X + \Gamma^2 - 3m = 0$$
$$\Rightarrow X^2 - 10X + 349 = 0$$
$$\Rightarrow A = \tfrac{1}{2}(10 + \sqrt{-1(100 - 1396)i^2}) \quad \text{mit} \quad i^2 = -1$$
$$\Leftrightarrow A = \tfrac{1}{2}(10 + 36i) = 5 + 18i$$
$$\Rightarrow B = 5 - 18i$$

Wir setzen abermals in Substitution (G2) ein:

$$x_1 = \frac{(\Gamma - b)}{3a} = -\tfrac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{(A-b)}{3a} = 2 + 3i, \qquad x_3 = \frac{(B-b)}{3a} = 2 - 3i$$

Man erhält also eine reelle und zwei komplexe Lösungen, wie vorausgesagt.

Zum Schluß noch eine kleine Bemerkung:

Die hier gewählten Gleichungsbeispiele sind nicht allzu kompliziert. Man könnte teilweise die Nullstellen auch durch Polynomdivision errechnen. Wählt man eine Ausgangsgleichung mit großen Koeffizienten, steigen die Werte für m und n schnell über die Milliardengrenze. Das kann zur Folge haben, daß die Grenzen der Rechengenauigkeit eines Taschenrechners überschritten werden, was zum Beispiel die Werte der Winkel im Fall des „Casus irreducibilis" nicht exakt genug werden läßt. Darum kann es vorkommen, daß die genauen Nullstellenwerte verfehlt werden.

Schluß

Es gibt einen exakten Weg, die Lösungen einer quadratischen und einer kubischen Gleichung zu berechnen. Man könnte also die Frage stellen, ob dies auch noch für Polynome höheren Grades möglich ist. Die Antwort ist ja. Aber nur für Gleichungen vierten Grades ist das noch möglich, weil sie sich wiederum durch eine geeignete Substitution auf ein Polynom dritten Grades reduzieren läßt. Diese kann man dann mit der uns jetzt bekannten Formel lösen. Für Gleichungen mit einer Potenz größer als vier ist eine Reduktion im allgemeinen Fall nicht mehr möglich. Nur Sonderfälle, in denen bestimmte Glieder entfallen, können reduzierbar sein. Bereits Cardano behandelt in seiner „Ars magna" eine Gleichung sechsten Grades, nämlich $x^6 + ax^4 + a^2x^2 + a^3 = bx^3$, die sich durch die Substitution $y = \frac{a}{x}$ auf ein kubisches Polynom reduzieren läßt. Allerdings steht meistens dann der Rechenaufwand in keinem vernünftigem Verhältnis mehr zum Nutzen. Man gelangt hier in die Grenzbereiche der Mathematik.

Anhang - erläuternde Gleichungsumformungen[9]

Umformung (U1):[10]

$$(3hx+k)^3 = (3hx)^3 + 3\cdot(3hx)^2 k + 3\cdot(3hx)k^2 + k^3$$

$$a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d = 0 \qquad /\cdot 27a^2$$

$$(3ax)^3 + 3\cdot(3ax)^2 b + (3ax)\cdot 9ac + 27a^2 d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(3ax)^3 + 3\cdot(3ax)^2 b + 3\cdot(3ax)b^2 + b^3}_{(3ax+b)^3 \equiv (3hx+k)^3} - 3\cdot(3ax)b^2 - b^3 + (3ax)\cdot 9ac + 27a^2 d = 0 \Leftrightarrow$$

$$X^3 - (3ax)\cdot 3b^2 - b^3 + (3ax)\cdot 9ac + 27a^2 d = 0 \Leftrightarrow$$

$$X^3 = 3\cdot\left[b^2 - 3ac\right]X + \left[9abc - 27a^2 d - 2b^3\right]$$

Umformung (U2):

Nach Vieta gilt:

$$(W-U)(W-V) = 0 \Leftrightarrow$$
$$W^2 - UW - VW + UV = 0 \Leftrightarrow$$
$$W^2 - (U+V)W + UV = 0$$
$$U+V = n,\ \ UV = m^3$$
$$\Rightarrow W^2 - nW + m^3 = 0$$

Umformung (U3):[11]

1: $\quad X^3 = 3m\cdot X + n$

2: $\quad \Gamma^3 = 3m\cdot\Gamma + n$

aus 2: $n = \Gamma^3 - 3m\cdot\Gamma$

in 1: $\quad X^3 = 3m\cdot X + \Gamma^3 - 3m\cdot\Gamma$

---

[9] Gleichungen teilweise aus: Dörrie, H.: Kub. und biquadrat. Gleichungen

[10] Binom aus: Barth/Mühlbauer/Nikol/Wörle: Mathematische Formeln und Definitionen (Formelsammlung)

[11] Binom aus: Barth/Mühlbauer/Nikol/Wörle: Mathematische Formeln und Definitionen (Formelsammlung)

$$\Leftrightarrow X^3 - \Gamma^3 - 3m(X - \Gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(X - \Gamma)}_{1.\ Lösung}\underbrace{\left(X^2 + X\Gamma + \Gamma^2 - 3m\right)}_{Hilfsgleichung\ f.\ 3./4.\ Lsg.} = 0$$

Umformung (U4):

$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

Man setze $\cos\varphi = o,\ 3\varphi = \Phi,\ 2ro = \xi$ in obige Gleichung:

$$\cos\Phi = 4o^3 - 3o \qquad / \cdot 2r^3$$

$$\Rightarrow (2ro)^3 - 3r^2(2ro) - 2r^3\cos\Phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \xi^3 = 3r^2\xi + 2r^3\cos\Phi$$

Umformung (U5):

$$\Delta = 4m^3 - n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4\left(b^2 - 3ac\right)^3 - \left(9abc - 27a^2d - 2b^3\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 486a^3bcd - 729a^4d^2 + 27a^2b^2c^2 - 108a^2b^3d - 108a^3c^3 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = \underbrace{\left(27a^2\right)}_{\neq 0}\underbrace{\left(18abcd + b^2c^2 - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d\right)}_{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Delta = \left(27a^2\right)\cdot\theta$$

Verzeichnis der verwendeten Literatur

- Aulis Verlag: Geronimo Cardano in: Biographien bedeutender Mathematiker
- Aulis Verlag: Athen, H., Bruhn, J.: Lexikon der Schulmathematik, Band 4
- Leibniz Verlag: Dörrie H.: Kubische und biquadratische Gleichungen, München, 1948
- Uchtmann H.: Zur Lösung kubischer Gleichungen in: Praxis der Mathematik (PM), 1963, Heft 5, S. 127/128
- J. Lindauer Verlag: Barth/Mühlbauer/Nikol/Wörle: Mathematische Formeln und Definitionen, München, 1994[5]
- F. A. Brockhaus: Brockhaus, Enzyklopädie, Band 21, Mannheim, 1993[19]

Eigenständigkeitserklärung

„Ich erkläre hiermit, daß ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.

_______________, den ___________ ______________________

Ort Datum Unterschrift des Schülers